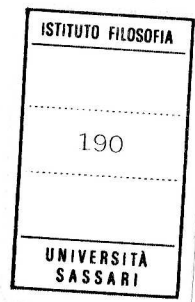
Lezioni italiane
Fondazione Sigma-Tau

I. PRIGOGINE

Le leggi del caos

Editori Laterza

LEZIONI ITALIANE

a cura della Fondazione Sigma-Tau e della Casa Editrice Laterza

Questa collana intende avviare il più ampio dibattito meta-disciplinare, umanistico e scientifico, con la partecipazione di prestigiose personalità della cultura italiana e internazionale.

Ogni volume nasce da un ciclo di lezioni, aperte al pubblico, tenute presso istituti universitari italiani, organizzate dalla Fondazione Sigma-Tau a cura di Pino Donghi e Lorena Preta; la realizzazione editoriale è della Casa Editrice Laterza.

VOLUMI PUBBLICATI

Wolf Lepenies
Ascesa e declino degli intellettuali in Europa

Aldo G. Gargani
Il testo del tempo

Francisco J. Varela
Un know-how per l'etica

John D. Barrow
Perché il mondo è matematico?

Hilary Putnam
Il pragmatismo: una questione aperta

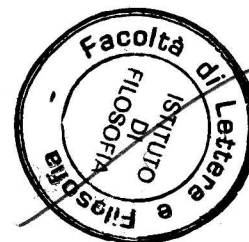
Francesco Corrao
Modelli psicoanalitici. Mito Passione Memoria

Ilya Prigogine
Le leggi del caos

VOLUMI IN CORSO DI PUBBLICAZIONE

Heinz von Foerster
Epistemologia dell'ignoranza *(estate 1993)*

ILYA PRIGOGINE

Le leggi del caos

Editori Laterza

Traduzione di Claudia Brega e Alessandro de Lachenal

Il ciclo di lezioni che hanno dato origine a questo libro
è stato svolto all'Università di Milano,
presso la cattedra di Filosofia della Scienza del prof. Giulio Giorello,
nei giorni 12, 13 e 14 febbraio 1992.

Prima edizione 1993

Finito di stampare nel marzo 1993
nello stabilimento d'arti grafiche Gius. Laterza & Figli, Bari
CL 20-4116-2
ISBN 88-420-4116-5

Introduzione

Nelle conclusioni della sua opera *La legge fisica* Richard S. Feynman si domanda: quale sarà il futuro della scienza? continueremo per sempre a scoprire nuove leggi? Egli ne dubita: potrebbe persino diventare noioso ed arriveremmo, conclude Feynman, a un punto in cui tutte le leggi, almeno quelle che determinano l'essenziale dei fenomeni, sarebbero conosciute. Non si riscopre l'America[1].

Tale concetto di una «fine della scienza» si riscontra in molte altre opere scritte da fisici autorevoli. Nel suo libro *Dal big bang ai buchi neri*, ad esempio, il cosmologo inglese Stephen Hawking predice l'avvento di una teoria unificata che ci consentirà di decifrare «la mente di Dio»[2].

La tesi esposta in questo volume giunge a una prospettiva diversa. La nozione di legge della natura, così come è formulata da Feynman o da Hawking, si riferisce ad un universo fondamentalmente reversibile, che non conosce differenza tra passato e futuro.

La fisica, da Galileo a Feynman e Hawking, ha ripetuto la più paradossale delle negazioni, quella della *freccia del tempo* che pure traduce la solidarietà della nostra esperienza interiore con il mondo in cui viviamo.

Le scienze del divenire e la fisica del non-equilibrio sono state respinte verso la fenomenologia, quasi ridotte a effetti parassiti che l'uomo introduce nelle leggi fondamentali. Cominciavamo finalmente a intravedere la possibilità di risolvere tale paradosso: la sua soluzione passa attraverso una generalizzazione del concetto di leggi della natura. Nel corso degli ultimi decenni un concetto nuovo ha conosciuto una fortuna sempre crescente: la nozione di instabilità dinamica associata a quella di «caos». Quest'ultimo fa pensare a disordine, imprevedibilità: ma vedremo che non è così. È possibile invece, come constateremo in queste pagine, includere il «caos» nelle leggi della natura, ma al prezzo di generalizzare tale nozione in modo da includervi le nozioni di probabilità e di irreversibilità. In breve, la nozione di instabilità ci obbliga ad abbandonare la descrizione di situazioni individuali (traiettorie, funzioni d'onda) per abbracciare descrizioni statistiche. È quindi a livello statistico che possiamo evidenziare la comparsa di una simmetria temporale spezzata.

Come ho già detto, la formulazione tradizionale delle leggi della natura opponeva le leggi fondamentali *atemporali* alle descrizioni fenomenologiche, che comprendono la freccia del tempo. La riconsiderazione del «caos» porta anche a una nuova coerenza, a una scienza che non parla solamente di leggi, ma anche di eventi, la quale non è condannata a negare l'emergere del nuovo, che comporterebbe un rifiuto della propria attività creatrice.

Oggi conosciamo diverse classi di sistemi instabili, da trasformazioni geometriche (mappe) che operano in tempi discreti fino a sistemi dinamici o quantità in cui il tempo agisce in modo continuo. È meraviglioso che attualmente la descrizione fondamentale accettata in fisica si faccia, come vedremo in queste pagine, in termini di sistemi instabili.

Nell'ambito di questo libro non è possibile presentare un'esposizione sistematica dei problemi legati alla nozione di instabilità e del loro legame con l'irreversibilità. La mia ambizione è di fornire uno sguardo introduttivo alla trattazione che sto sviluppando nella mia prossima opera, *Time, Chaos and the Quantum*.

Ogni nuova teoria fisica trova la sua espressione in una formulazione matematica originale, che è presente anche qui: ciò potrebbe suscitare qualche difficoltà nella esposizione, dato che è mio desiderio (e rientra anche negli intenti programmatici di questa collana) che questo libro sia accessibile a un pubblico più vasto, composto non solo da fisici teorici. Eppure la materia esige un minimo di rigore: si tratta di un cambiamento di prospettiva che deve essere giustificato e analizzato.

In questo testo ho analizzato solamente esempi semplici (essenzialmente «mappe») e mi sono limitato a fare osservazioni qualitative sull'oggetto dei sistemi dinamici propriamente detti (classici o quantistici). Ho anche ridotto al minimo il ricorso all'apparato matematico. Al contrario, nell'Appendice scritta in collaborazione con il dottor I. Antoniou, che qui tengo a ringraziare vivamente per l'aiuto che mi ha recato, è presentata un'esposizione più sistematica del formalismo matematico.

Poiché ciò che ho esposto qui fu presentato originalmente in alcune conferenze, non ho voluto appesantire il testo di troppi riferimenti alla bibliografia, che comunque sono riportati nelle Note.

Concludendo questa introduzione, vorrei esprimere la mia gratitudine agli organizzatori di quelle conferenze milanesi e in particolar modo alla signora Lorena

Preta ed al professor Giulio Giorello, presso la cui cattedra di Filosofia della Scienza ho avuto la possibilità e il piacere di parlare in pubblico. Conservo un piacevolissimo ricordo dell'atmosfera d'interesse e d'amicizia che ho incontrato a Milano.

Ringrazio anche i miei colleghi I. Antoniou, P. Nardone e S. Tasaki per il contributo recato in occasione dell'organizzazione di queste conferenze.

I. P.

LE LEGGI DEL CAOS

Capitolo primo

Un titolo come *Le leggi del caos* può sembrare paradossale. Esistono leggi del caos? Il caos non è per definizione «imprevedibile»? Vedremo che non è così, ma che la nozione di caos ci costringe invece a riconsiderare quella di 'legge della natura'. Nella prospettiva classica una legge della natura era associata a una descrizione deterministica e reversibile nel tempo, in cui futuro e passato avevano lo stesso ruolo. L'introduzione del caos ci obbliga a generalizzare la nozione di legge della natura e a introdurvi i concetti di probabilità e di irreversibilità. Si tratta, in tal caso, di un cambiamento radicale, poiché, a voler seguire davvero questo approccio, il caos ci obbliga a riconsiderare la nostra descrizione fondamentale della natura. Non può essere affatto compito di questo libro presentare un'esposizione sistematica della teoria del caos. D'altronde esistono varie opere alle quali il lettore può fare riferimento, ma quel che vorrei sottolineare in questo contesto è il ruolo fondamentale del caos a ogni livello di descrizione della natura, che sia quello microscopico, macroscopico o cosmologico.

Oggi si parla di caos a proposito dei fenomeni più disparati. Per esempio si associa il caos alla turbolenza con

cui scorrono i fluidi: precisiamo subito che non sono questi gli aspetti di cui ci occuperemo in questa sede. Prima di tutto siamo interessati al caos così come risulta dalle equazioni dinamiche classiche o quantistiche che, nella sfera delle nostre conoscenze, corrispondono alla descrizione microscopica fondamentale. Indubbiamente da questo caos microscopico può risultare il caos macroscopico, ma ritorneremo su questo concetto più avanti. La nostra attenzione si concentra soprattutto sulla descrizione detta «fondamentale» del comportamento della materia.

Il caos è sempre la conseguenza di fattori di instabilità. Il pendolo in assenza di attrito è un sistema stabile, ma curiosamente la maggior parte dei sistemi di interesse fisico, che siano di meccanica classica o di meccanica quantistica, sono sistemi instabili. In essi una piccola perturbazione si amplifica e traiettorie inizialmente vicine divergono. L'instabilità introduce nuovi aspetti essenziali.

Dunque noi esamineremo principalmente l'incidenza di tale instabilità sui concetti fondamentali: il determinismo, l'irreversibilità e persino i fondamenti della meccanica quantistica: come dimostreremo, tutti questi problemi s'illuminano di luce nuova. Ecco perché quando si prende in considerazione il caos, si può parlare di una riformulazione delle leggi della natura. La posta in gioco è di importanza primaria.

Attualmente la scienza ha un ruolo fondamentale nella nostra civiltà, eppure, usando una nota espressione introdotta da Snow, viviamo ancora in una società scissa tra due culture, la comunicazione tra i cui membri rimane difficile. Qual è la ragione di tale dicotomia? Spesso è stato suggerito che si tratta di un problema di conoscen-

ze. Le scienze di base si esprimono in termini matematici. Gli «scienziati» non leggono Shakespeare e gli «umanisti» sono insensibili alla bellezza della matematica. Credo che questa dicotomia viva di una motivazione più profonda e che risieda nel modo in cui la nozione di tempo è incorporata in ognuna di queste due culture.

Nelle scienze naturali l'ideale tradizionale era raggiungere la certezza associata a una descrizione deterministica, tanto che persino la meccanica quantistica persegue questo ideale. Al contrario le nozioni di incertezza, di scelta, di rischio dominano le scienze umane, che si tratti di economia o di sociologia.

È il modo di descrivere lo scorrere del tempo che distingue le due culture. Si potrebbe anche pensare di distinguerle attraverso la complessità del loro oggetto: la fisica si occuperebbe allora dei fenomeni detti *semplici* e le scienze umane dei fenomeni *complessi*. Ma al giorno d'oggi il divario tra fenomeni semplici e complessi va riducendosi. Sappiamo che le particelle cosiddette elementari e i problemi della cosmologia corrispondono a fenomeni estremamente complessi, che oggi trovano ben poco riscontro con le idee che si avevano a riguardo ancora poche decine di anni fa. Invece è stato possibile stabilire modelli semplici che descrivessero, in modo sì schematico, ma altrettanto interessante, problemi considerati tradizionalmente complessi, come il funzionamento del cervello o il comportamento delle società degli insetti. Quindi, attualmente, la distinzione basata sull'idea di complessità pare meno chiara di quanto non lo fosse in precedenza.

Mi ritengo completamente d'accordo con sir Karl R. Popper quando afferma che il problema centrale alla base della dicotomia tra le due culture è il problema del

tempo. Il tempo è la nostra dimensione esistenziale e fondamentale; è la base della creatività degli artisti, dei filosofi e degli scienziati. L'introduzione del tempo nello schema concettuale della scienza classica ha significato un progresso immenso. Eppure esso ha impoverito la nozione di tempo, poiché non vi era fatta alcuna distinzione tra il passato e il futuro. Al contrario in tutti i fenomeni che percepiamo attorno a noi, che appartengano alla fisica macroscopica, alla chimica, alla biologia oppure alle scienze umane, il futuro e il passato svolgono ruoli differenti. Ovunque troviamo una «freccia del tempo». Pertanto si pone la domanda di come questa freccia possa emergere dal non-tempo. Il tempo che percepiamo è forse un'illusione? È questo interrogativo che porta al «paradosso» del tempo, che è il fulcro di questo mio lavoro.

La storia del paradosso del tempo può essere suddivisa in tre tappe. La presa di coscienza alla fine dell'Ottocento, il suo improvviso riemergere negli ultimi decenni e la sua recentissima soluzione, l'argomento principale di cui mi occuperò qui, come già detto. È a questo proposito che le nozioni di instabilità e di caos hanno un ruolo essenziale.

Io non ignoro la difficoltà di esporre tali questioni in un contesto così ristretto, dato che la soluzione del paradosso del tempo è legata a problemi matematici nuovi e appassionanti, ma difficili da descrivere senza un appropriato vocabolario. Ciò richiede quindi un simultaneo sforzo tanto da parte dell'autore quanto del lettore.

Ma ritorniamo dapprima alla posizione tradizionale. È possibile contrapporre «essere» e «divenire» come contrapponiamo «verità» e «illusione»? Questa era, com'è ben noto, la posizione di Platone, ed è anche quella della

fisica classica, la cui ambizione era quella di scoprire ciò che permane immutabile al di là dell'apparente cambiamento. La nozione di evento era esclusa da tale descrizione, e per questo l'ambizione di sfociare in una fisica senza eventi ha sempre cozzato contro grandi difficoltà. Già Lucrezio si è trovato costretto a introdurre la nozione di *clinamen* che perturba la caduta degli atomi nel vuoto così da consentire la comparsa di novità. Allo stesso modo, duemila anni dopo, in un famoso articolo di Einstein che descrive l'emissione spontanea di luce, leggiamo che il tempo di emissione dei fotoni è determinato dal caso. Ecco un parallelismo certamente imprevisto quando si pensa che Lucrezio ed Einstein sono separati dalla più grande rivoluzione nella storia delle nostre relazioni con la natura, cioè la nascita della scienza moderna.

La scienza moderna è dunque basata sulla nozione di 'leggi della natura'. Noi vi siamo talmente abituati che per noi è diventata qualcosa di simile a un truismo, eppure essa racchiude implicazioni molto profonde. Una di queste caratteristiche essenziali consiste precisamente nell'eliminazione del tempo. Io ho sempre pensato che in tutto ciò l'elemento teologico abbia giocato un ruolo importante. Per Dio tutto è dato; novità, scelta o azione spontanea dipendono dal nostro punto di vista umano, mentre agli occhi di Dio il presente contiene il futuro come il passato. In quest'ottica lo studioso grazie alla conoscenza delle leggi della natura si avvicina progressivamente alla conoscenza divina. Certo, bisogna dire che questo programma ha avuto un successo straordinario, tanto che spesso è sembrato di essere arrivati a realizzarlo completamente.

La fisica classica si basava sullo studio della gravi-

tazione e dell'elettromagnetismo; la fisica moderna vi ha aggiunto altri tipi di interazioni. Uno dei problemi all'interno del programma della fisica moderna è il problema dell'unificazione delle interazioni. Spesso è stato manifestato il desiderio di scoprire un'unica legge a partire dalla quale fosse possibile derivare tutte le altre. Tale speranza era alla base dello studio di Einstein sulla teoria del campo unificato e costituisce ancora il tema centrale del recente libro di Stephen W. Hawking *Dal big bang ai buchi neri*, già citato nell'Introduzione. Eppure l'unificazione delle interazioni è ben lungi dall'essere il solo problema oggi ancora da risolvere: fin dall'Ottocento il sorgere di scienze basate su paradigmi diversi aveva aperto altre prospettive. La biologia darwiniana e la termodinamica sono scienze dell'evoluzione. La termodinamica è la scienza dell'era industriale, ma le conseguenti rapide trasformazioni dei nostri rapporti con la natura cominciavano a diventare motivo di profonda ansia. Infatti il pericolo che minacciava l'umanità era l'esaurimento delle risorse naturali: sembrava quasi che l'universo fosse condannato a evolversi in direzione della morte termica.

Dopo Darwin la biologia è l'espressione di un paradigma evoluzionistico, ma il darwinismo insisteva sulla comparsa di novità, nuove specie, nuovi modi d'adattamento e nuove nicchie ecologiche, mentre la visione termodinamica parlava solo di livellamento e di morte termica. L'universo avrebbe iniziato a formarsi a un livello d'entropia molto basso, corrispondente a un «ordine» iniziale, per arrivare, dopo un periodo sufficientemente lungo, alla morte termica.

Ma in che cosa consisteva l'ordine iniziale? È vero che l'unico fattore prevedibile dell'universo è la sua

morte? Torneremo ancora su tali quesiti, che rappresentano il nucleo della cosmologia attuale. Comunque sia, l'emergere dei paradigmi evolutivi ha contribuito a riportare il paradosso del tempo nel dominio della scienza, poiché da una parte nella scienza newtoniana non esisteva una freccia del tempo e dall'altra il concetto di irreversibilità è essenziale sia per la termodinamica sia per la biologia.

Capitolo secondo

Il primo scienziato che affrontò il paradosso del tempo fu il fisico austriaco Ludwig Boltzmann (1844-1906), il quale nel 1872 tentò di dare una giustificazione dinamica «microscopica» alla freccia del tempo della termodinamica. Ma i suoi studi si scontrarono con aspre critiche, nelle quali gli si rimproverava una mancanza di logica. Il grande matematico Jules-Henri Poincaré (1854-1912) arrivò a scrivere che non poteva raccomandare la lettura di Boltzmann, dal momento che non poteva raccomandare la lettura di testi le cui conclusioni erano in contraddizione con le premesse. Infatti sembrava evidente che non si potesse dedurre una freccia del tempo dalla fisica classica, di per sé basata sull'equivalenza tra passato e futuro. Queste critiche portarono Boltzmann a ritrattare le proprie posizioni per associare l'entropia al «disordine». Lo schema di Boltzmann è molto conosciuto. Consideriamo due scatole collegate tramite un condotto.

Mettiamo molte particelle in una di queste scatole e poche nell'altra; con il passare del tempo ci aspettiamo un progressivo livellamento del numero delle particelle: ecco in cosa consisterebbe l'irreversibilità. Ma, benin-

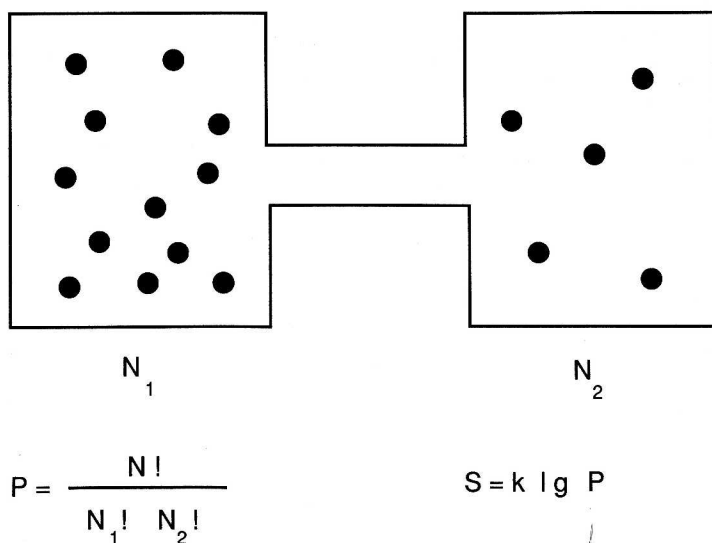



FIG. 1. Lo schema di Boltzmann.

teso, se si trattasse esclusivamente di questo, sarebbe effettivamente un'illusione, poiché se aspettiamo ancora può darsi che le particelle si concentrino nuovamente nello stesso recipiente. In tal caso l'irreversibilità sarebbe semplicemente dovuta ai limiti della nostra pazienza. Questo è precisamente l'esempio che Feynman utilizza per giustificare la reversibilità delle leggi fondamentali della fisica[3].

Tale eliminazione della freccia del tempo venne accettata con entusiasmo da grandissimi fisici. Einstein ha scritto che il tempo come irreversibilità è solo «illusione» e questa è la conclusione che autori molto famosi come Feynman o Hawking hanno formulato nelle loro opere succitate. Eppure, come già abbiamo scritto altrove:

È meglio sottolineare subito il carattere quasi inconcepibile di questa idea di reversibilità dinamica. Il problema del tempo — di ciò che il suo flusso conserva, crea, distrugge — è stato sempre al centro delle preoccupazioni umane. Molte forme di speculazione hanno chiamato in causa l'idea di novità e affermato l'inesorabile concatenazione di cause ed effetti. Molte forme di sapere mistico hanno negato la realtà di questo mondo mutevole e incerto, e hanno definito l'ideale di un'esistenza che permetta di sfuggire al dolore della vita. Conosciamo d'altra parte l'importanza che aveva nell'antichità l'idea di un tempo circolare, che ritorna periodicamente alle sue origini. Ma lo stesso eterno ritorno è segnato dalla freccia del tempo, come il ritmo delle stagioni o quello delle generazioni umane. Nessuna speculazione, nessun sapere ha mai affermato l'equivalenza tra quel che si fa e quel che si disfa, tra una pianta che cresce, fiorisce e muore, e una pianta che rinasce, ringiovanisce e ritorna al suo seme primitivo, tra un uomo che matura e impara e un uomo che diventa progressivamente fanciullo, poi embrione, poi cellula. Tuttavia, fin dalla sua origine, la dinamica, la teoria fisica che si identifica con il trionfo stesso della scienza, implicava questa negazione radicale del tempo. Ecco quel che rivelò l'insuccesso di Boltzmann e che, prima di lui, nessuno dei pensatori che, come Leibniz o Kant, avevano fatto della scienza del moto il modello conoscitivo del mondo, aveva osato riconoscere[4].

Nell'apprezzare il paradosso del tempo, non bisogna dimenticare che i fisici fin dall'inizio avevano fatto una scelta specifica relativa all'oggetto del loro studio. Poincaré nell'opera *Scienza e metodo*[5] insiste sul fatto che il fisico deve scegliere fenomeni ripetibili, in modo da poter stabilire delle leggi generali. Attualmente forse non concorderemmo più completamente con Poincaré, poiché quel che ci interessa oggi non è necessariamente quel che possiamo prevedere con certezza. Popper usa una bel-

lissima espressione, parla di orologi e nuvole[6]. La fisica classica s'interessava prima di tutto di orologi, la fisica moderna soprattutto di nuvole. Ma il punto importante è che oggi possiamo cominciare a sconfinare dal quadro specifico che corrispondeva alla nascita della scienza classica. Possiamo ammirare la semplicità del moto planetario, la precisione associata agli orologi, ma possiamo anche riconoscerne il carattere particolare, quasi unico. È tale trasformazione del nostro punto di vista a rappresentare uno degli argomenti di queste pagine. Il mio parere è che stiamo vivendo un momento privilegiato: la fisica è giunta ad un punto di transizione, si apre a un mondo di nuovi interrogativi e allo stesso tempo a una migliore comprensione della propria storia.

Adesso vorrei passare a occuparmi di come il problema del tempo sia tornato alla ribalta dell'interesse di molti studiosi negli ultimi decenni. Questa ricomparsa coincide curiosamente anche con un momento particolare della storia sociale e politica. In qualche modo percepiamo lo scorrere del tempo. Che siano gli eventi a suggerire una nuova visione dell'Europa occidentale oppure gli avvenimenti all'Est, sentiamo che siamo dinnanzi a una «biforcazione» a cui non si applica il concetto della legge classica della natura; ci riesce più difficile accettare che la nozione di evento non sia altro che un'illusione. Eppure era questo il concetto base della fisica classica, concetto così profondamente radicato in noi che si finiva con il considerare ogni 'evento' quasi come qualcosa di antiscientifico.

Quali sono i grandi eventi della storia del mondo? Certamente la nascita dell'universo o della vita. A tal proposito esiste un arguto racconto di Asimov, intitolato *L'ultima domanda*[7]. Saremo in grado un giorno di

vincere il secondo principio della termodinamica? Ecco la domanda che un popolo, di generazione in generazione, di civiltà in civiltà pone a un gigantesco computer, che però si limita a replicare costantemente «Dati insufficienti per una risposta significativa». Passano miliardi di anni, le stelle e le galassie muoiono ma il computer collegato direttamente allo spazio-tempo continua a ricevere dati e a calcolare. Alla fine l'universo è morto, ma il computer ottiene la sua risposta. Adesso sa come vincere il secondo principio ed è in questo istante che nasce il nuovo mondo.

Il riemergere del paradosso del tempo è dovuto essenzialmente a due tipi di scoperte. Il primo consiste nella scoperta delle strutture di non-equilibrio, dette anche «dissipative». Questa nuova fisica del non-equilibrio è stata oggetto di numerose esposizioni[8], perciò sarò molto breve. Ricordiamo solo che oggi sappiamo che la materia si comporta in maniera radicalmente diversa in condizioni di non-equilibrio, quando cioè i fenomeni irreversibili svolgono un ruolo fondamentale. Uno degli aspetti più spettacolari di questo nuovo comportamento è la formazione di strutture di non-equilibrio che esistono solo finché il sistema dissipa energia e resta in interazione con il mondo esterno. Ecco un evidente contrasto con le strutture d'equilibrio, come ad esempio i cristalli, che una volta formati possono rimanere isolati e sono strutture «morte» che non dissipano energia.

L'esempio più semplice di strutture dissipative che si può evocare per analogia è la città. Una città è differente dalla campagna che la circonda; le radici di tale individualizzazione risiedono nelle relazioni che essa intrattiene con la campagna attigua: se queste venissero soppresse, la città scomparirebbe.

Le due branche della scienza che studiano maggiormente le strutture dissipative sono l'idrodinamica e la cinetica chimica. D'altronde recentemente a questi rami è venuta ad aggiungersi l'ottica dei laser.

Un esempio molto noto in idrodinamica è l'instabilità di Bénard. Quest'esperimento consiste nell'imporre un gradiente verticale di temperatura a uno strato orizzontale di fluido, fin quando la differenza di temperatura tra superficie inferiore e superficie superiore dello strato non sia abbastanza grande; a questo punto nel liquido si formano dei gorghi, in cui miliardi di particelle si rincorrono vorticosamente, creando strutture caratteristiche di forma esagonale. Così il non-equilibrio crea molte correlazioni «a lunga portata». Desidero far notare che la materia in situazione d'equilibrio è cieca, ogni molecola vede solo le molecole più vicine che la circondano. Invece il non-equilibrio porta la materia «a vedere»; ecco allora che sorge una nuova coerenza. La varietà delle strutture di non-equilibrio che si scopre progressivamente è motivo di continuo stupore: esse mostrano il ruolo creatore fondamentale dei fenomeni irreversibili, quindi anche della freccia del tempo.

Prendiamo un recipiente con materia al suo interno e «isoliamolo» dal mondo. Questo sistema sta per raggiungere l'equilibrio. Ora, però, se osserviamo le molecole al microscopio, vedremo un movimento disordinato e incessante: si tratta del «caos molecolare» (che bisogna distinguere dal «caos dinamico», su cui torneremo). Adesso se apriamo il sistema e vi facciamo penetrare flussi d'energia e di materia, la situazione cambia radicalmente. Da un lato, a livello microscopico, si verificano fenomeni irreversibili, flussi di calore, reazioni chimiche che portano a nuove strutture spaziotemporali impossibili

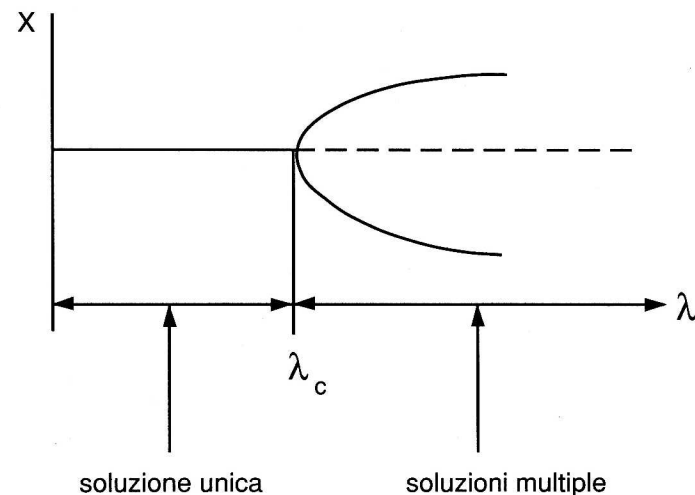



FIG. 2. Biforcazioni.

da realizzare in situazione di equilibrio; dall'altro lato, il caos molecolare si organizza infrangendo simmetria temporale e simmetrie spaziali.

Diamo due esempi di «strutture dissipative». Cominciamo con gli oscillatori chimici. Per semplificare, rappresentiamo il sistema come formato da molecole x e y di colori «differenti». L'immagine intuitiva che ci facciamo delle collisioni è che esse corrispondano a scontri casuali: pertanto dovremmo aspettarci di trovare flash di blu associati ad x oppure di rosso associati a y. Invece osserviamo un'alternanza periodica dei colori rosso e blu.

Oggi conosciamo un gran numero di simili oscillatori chimici. La soluzione oscillante, ben lontana dall'equilibrio, compare a partire da un punto di «biforcazione». I punti di biforcazione corrispondono al diagramma rappresentato nella figura 2.

Dai punti di biforcazione emergono diverse soluzioni, la scelta tra le quali è data da un processo probabilistico. Ripetendo l'esperimento, in situazioni ideali, avremo il 2,50% dei sistemi che andrebbero sul ramo (b_1) della figura e il 50% sul ramo (b_2). Beninteso, in generale, in conseguenza della prima nascono altre biforcazioni. Quindi l'evoluzione avviene così tramite una successione di stadi descritti dalle leggi deterministiche e probabilistiche. Persino a livello macroscopico, probabilità e determinismo non si contrappongono ma si completano. L'esistenza di biforcazioni conferisce un carattere storico all'evoluzione di un sistema: la storia s'introduce quindi fin dai sistemi più semplici della chimica e dell'idrodinamica.

Una notevole proprietà di queste biforcazioni è la loro sensibilità, il fatto cioè che piccole variazioni nei casi dei sistemi conducano alla scelta preferenziale di un ramo piuttosto che di un altro — perciò basta rompere la simmetria. La figura 3(a) rappresenta la biforcazione ideale, mentre la figura 3(b) una biforcazione incompleta dovuta alla presenza di un campo che rompe la simmetria tra i due rami.

Vorrei indicare un caso recente particolarmente esemplificativo dei meccanismi di tale rottura di simmetria. Mi riferisco ad un recente studio di Kondepudi e dei suoi collaboratori intitolato *Chiral Symmetry Breaking in Sodium Chlorate Crystallization*[9]. Le molecole di clorato di sodio $NaClO_3$, a differenza dei cristalli di $NaClO_3$, sono otticamente inattive, cioè non fanno ruotare il piano di polarizzazione della luce. Esistono quindi due forme: una forma destrogira e una forma levogira. Se si raffredda una soluzione di $NaClO_3$ si forma lo stesso numero di cristalli levogiri o destrogiri, a parte alcune fluttuazioni

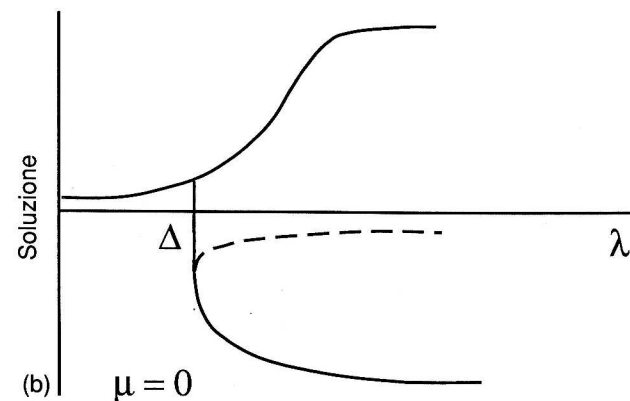
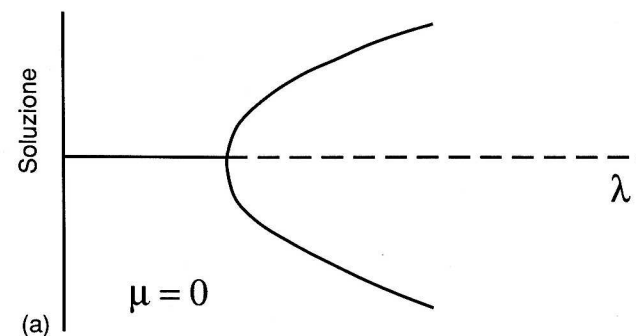



FIG. 3. Biforcazione incompleta. Selezione di una biforcazione tramite una perturbazione legata al campo esterno μ e ottenuta con rottura di simmetria. La separazione minima Δ tra i rami perturbati deve superare il disturbo dovuto alle fluttuazioni.

statistiche. Supponiamo di mettere nella soluzione in corso di raffreddamento uno strumento che agitandola la rimescoli completamente. In tal caso constateremmo che le molecole portano a cristalli tutti levogiri o tutti destrogiri: com'è possibile? La scelta tra un cristallo destrogiro o levogiro può essere considerata alla stregua di una biforcazione. Nell'ambiente a riposo queste biforcazioni sono indipendenti: la metà si comporta in un modo e l'altra metà in un altro. In un sistema agitato la prima biforcazione dà vita a una forma o destrogira o levogira. A causa dell'agitazione i germi dei primi cristalli si diffondono nell'ambiente. Pertanto troveremmo o unicamente cristalli levogiri o unicamente cristalli destrogiri. Il campo che rompe la simmetria del sistema della figura 3 qui è prodotto dall'agitazione.

È divertente ricordare in questo contesto l'importanza che Pasteur attribuiva alla simmetria molecolare. Per questi la differenza tra i cristalli levogiri o destrogiri era essenziale per capire il fenomeno della vita. Pasteur non ha forse scritto: «la vita così come si manifesta ai nostri occhi è una funzione dell'asimmetria dell'universo e una sua conseguenza diretta»? L'universo è dissimmetrico. Attualmente siamo in grado di comprendere meglio tale affermazione poiché la rottura di simmetria, alla quale Pasteur fa allusione, è legata al non-equilibrio, all'irreversibilità. Quanto a quest'ultima, ci appare di per sé come una conseguenza dell'instabilità inerente alle leggi dinamiche della materia.

Adesso passiamo a un'altra manifestazione spettacolare della rottura di simmetria introdotta dalla freccia del tempo. Si tratta della formazione delle strutture stazionarie di non-equilibrio. La formazione di tali strutture era stata predetta da Turing in un suo fondamen-

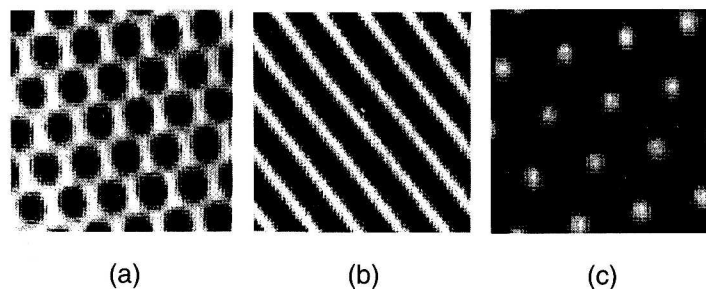



FIG. 4. Strutture di Turing.

tale studio del 1952[10] e approfondita dal nostro gruppo negli anni Sessanta[11]; tuttavia a livello sperimentale esse sono state osservate solo l'anno scorso nei laboratori di Bordeaux[12] e di Austin[13] nel Texas (Fig. 4). La difficoltà sperimentale maggiore è stata quella di evitare le correnti di convezione che le distruggono. Dal punto di vista teorico ciò che forse è più importante nell'osservazione di queste strutture è che così possiamo verificare la comparsa di dimensioni intrinseche dovute ai fenomeni irreversibili. Essenzialmente, la distanza tra le «maglie» di queste strutture è determinata dal rapporto $\sqrt{\frac{D}{k}}$ in cui D è un coefficiente di diffusione e k l'inverso di un tempo legato alla rapidità di reazione chimica. Vediamo quindi comparire tutta una nuova cristallografia di non-equilibrio.

I precedenti esempi si riferiscono alla formazione di strutture. Ma i processi di non-equilibrio potevano anche dare vita a segnali non periodici, più irregolari. Si parla allora di «caos dissipativo temporale» o caos spazio-temporale (vedi Fig. 5).

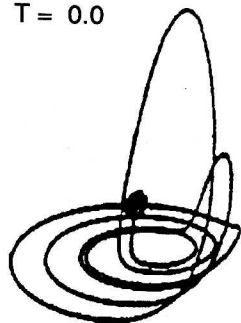
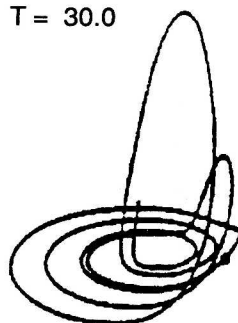
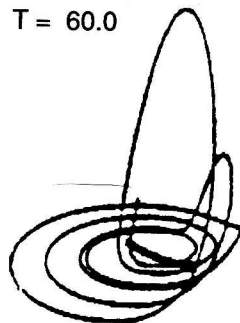
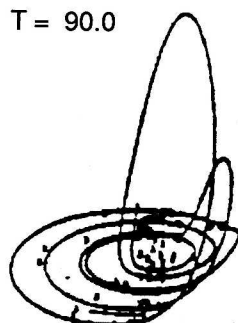
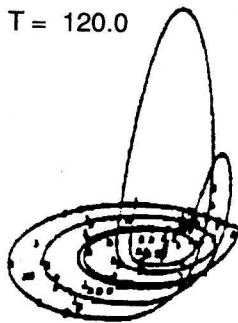
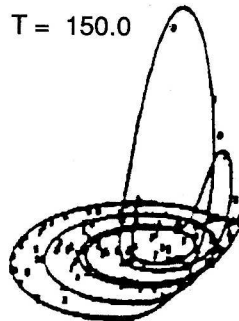



FIG. 5. Caos spazio-temporale.

Insistiamo sul fatto che, dal punto di vista molecolare, si tratta sempre di fenomeni collettivi che mettono in gioco miliardi e miliardi di molecole. L'irreversibilità porta a nuovi fenomeni di ordine. Quel che bisogna anche ricordare è che, già a livello macroscopico, assistiamo a una miscela di determinismo e probabilità. In uno dei suoi ultimi studi Einstein[14] ritornò sul ruolo delle probabilità in fisica: secondo lui sarebbe rimasto deluso chi pensava che il carattere statistico della meccanica quantistica stesse per distruggere il determinismo a livello «macroscopico», che è quello che ci tocca direttamente. Comunque le considerazioni statistiche della meccanica quantistica si applicano solo a livello macroscopico. Ecco uno dei punti interessanti dello studio sui punti di biforcazione che ho appena menzionato. Questi dimostrano che persino a livello macroscopico la nostra predizione del futuro mescola insieme determinismo e probabilità. Nel punto della biforcazione la predizione ha carattere probabilistico, mentre tra punti di biforcazione possiamo parlare di leggi deterministiche.

Tutti questi esempi ci mostrano che la freccia del tempo ha il ruolo di creare strutture. Possiamo parlare di «sistema» solo nelle situazioni di non-equilibrio. Senza le correlazioni a lunga portata dovute al non-equilibrio non ci sarebbe vita, né, a maggior ragione, cervello.

Ecco spiegato il motivo per cui i fenomeni di non-equilibrio ripresentano con particolare evidenza il paradosso del tempo, che mette in luce, prima di tutto, il ruolo «costruttivo» del tempo. I fenomeni irreversibili non si riducono a un aumento di «disordine», come si pensava un tempo, ma al contrario hanno un ruolo costruttivo importantissimo. Ma questo non obbliga a rivedere le nostre idee sui fondamenti dinamici dei fenomeni irre-

versibili. Nell'immagine classica l'irreversibilità era dovuta alle nostre approssimazioni e alla nostra ignoranza. In questo modo eravamo noi a introdurre l'irreversibilità in una natura che di per sé è reversibile nel tempo e deterministica. Un modo più sofisticato di esprimere la medesima idea era quello di parlare di «grana grossa» (*coarse graining*). Oltre ai risultati della dinamica dovevamo tener conto di ciò che nel mondo macroscopico potevamo derivare solo dalle «grandezze medie». Questa immagine della «grana grossa» è quindi un'altra forma di esprimere l'idea che è la nostra ignoranza a portare all'irreversibilità. Al limite si potevano sostenere simili idee a proposito di manifestazioni molto semplici e di fenomeni irreversibili, come viscosità o diffusione, ma diventa impossibile farlo dinnanzi agli oscillatori chimici oppure alle strutture di Turing, altrimenti si cadrebbe nell'assurdo: bisognerebbe attribuire l'intero funzionamento della vita alla nostra ignoranza, oppure rigettarla in ciò che è solamente fenomenologico.

La vita sarebbe «meno fondamentale» della non-vita? È già molto che, come vedremo nel seguito di questa esposizione, oggi siamo in grado di collegare l'irreversibilità non più alla nostra ignoranza, ma alla struttura fondamentale delle leggi della dinamica classica o quantistica formulate per i sistemi instabili o caotici. Feynman descrive bene l'immagine classica del mondo, quando, nel suo libro *La legge fisica*, paragona la natura a un'immensa partita di scacchi: ogni movimento preso isolatamente sarebbe semplice e la complessità, proprio come l'irreversibilità, risulterebbe semplicemente dai numerosi elementi del gioco. Ma oggi è difficile accettare quest'immagine, poiché già a livello elementare, come vedremo, compare il problema dell'instabilità.

Un altro modo di provare a eliminare l'irreversibilità è quello di richiamarsi al principio antropico. È quel che fa Stephen Hawking nel suo libro già citato, *Dal big bang ai buchi neri*, in cui scrive: «Una freccia del tempo termodinamica forte è [...] necessaria per l'operare della vita intelligente», e aggiunge poco più avanti: «Per compendiare, le leggi della scienza non distinguono fra le direzioni del tempo in avanti e all'indietro»[15]. Ma come conciliare queste due affermazioni? Se affinché la vita intelligente possa sbocciare è necessaria una forte freccia termodinamica, bisogna che questa abbia una contropartita nella nostra descrizione dell'universo; deve quindi essere reale quanto un qualsiasi altro fenomeno fisico. Dal momento che le leggi della dinamica tradizionale, che sia dinamica classica, quantistica o relativistica, non contengono la direzione del tempo, diventa quindi necessario tentare di riformularle. È vero che l'introduzione dell'irreversibilità ci costringe a riformularle, ma è pur vero che si tratta evidentemente di un'impresa assai ambiziosa. Mi ricordo una domanda che Heisenberg amava porre: «Qual è la differenza tra un pittore e un fisico teorico?», e la risposta che gli piaceva dare era che il pittore astratto voleva essere il più originale possibile, mentre un fisico teorico deve esserlo il «meno» possibile. Io accetto questa conclusione di Heisenberg e se penso che bisogna riformulare le leggi della dinamica, è perché non vedo come altrimenti si potrebbe far rientrare il tempo nella descrizione fisica del mondo. Ora, quest'introduzione del tempo al livello fondamentale di descrizione diventa una necessità ineluttabile, dopo quel che abbiamo appreso negli ultimi decenni circa il ruolo costruttivo dell'irreversibilità.

Prima abbiamo detto che il riemergere del parados-

so del tempo era dovuto a due sviluppi entrambi inattesi. Il primo è la scoperta delle strutture di non-equilibrio e il secondo è legato alla nuova evoluzione della dinamica classica, che ben testimonia il carattere imprevedibile dello sviluppo della scienza. Tutti si aspettavano nuovi sviluppi nell'ambito della meccanica quantistica o della relatività, ma che la dinamica classica, la più antica delle scienze, dopo tre secoli si trasformasse così profondamente è un evento forse unico nella storia delle scienze.

Capitolo terzo

Ora rivolgeremo la nostra attenzione al mondo microscopico, ossia a quello della dinamica. Ho già descritto la battaglia che Boltzmann ha condotto per introdurre il secondo principio della termodinamica nella fisica classica. Egli era stato costretto a concludere che l'irreversibilità postulata dalla termodinamica era incompatibile con le leggi reversibili della dinamica. Le sue conclusioni sembravano confermate dal fatto che in relatività e in meccanica quantistica il punto di vista è rimasto lo stesso. Le leggi quantistiche o relativistiche di base restano reversibili rispetto al tempo, proprio come nella dinamica classica. Ma negli ultimi anni si è verificato un drammatico cambiamento. Un esempio di questo nuovo punto di vista emergente è la dichiarazione solenne che sir James Lighthill fece nel 1986 in veste di presidente dell'Union internationale de mécanique pure et appliquée. Lighthill si espresse con le seguenti parole:

> A questo punto mi devo fermare e parlare in nome della grande fratellanza che unisce gli esperti della meccanica. Oggi siamo pienamente coscienti di quanto l'entusiasmo che i

nostri predecessori nutrivano per il meraviglioso successo della meccanica newtoniana li abbia portati ad operare generalizzazioni, nel campo della predicibilità [...], che ormai sappiamo essere false. Noi tutti desideriamo, perciò, presentare le nostre scuse per aver indotto in errore il nostro colto pubblico, diffondendo, a proposito del determinismo dei sistemi che aderiscono alle leggi newtoniane del moto, idee che dopo il 1960 si sono rivelate inesatte[16].

Ecco una dichiarazione che indubbiamente si può qualificare eccezionale. Gli storici della scienza sono abituati a rivoluzioni in cui una teoria viene smentita e l'altra è indotta a trionfare. È anche vero che ognuno di noi può commettere degli errori e poi deve scusarsi di averli commessi, ma è del tutto eccezionale sentire degli esperti riconoscere che per tre secoli si sono sbagliati su un punto essenziale del loro campo di ricerca.

Il rinnovamento della dinamica, la scienza occidentale più antica, è un fenomeno unico nella storia delle scienze. Per molto tempo il determinismo è stato il simbolo stesso dell'intelligibilità scientifica, mentre oggi non è altro che una proprietà valida solo in casi limite, cioè precisamente nei sistemi dinamici stabili. Pertanto la nozione di probabilità che Boltzmann aveva introdotto per poter esprimere la freccia del tempo non corrisponde più alla nostra ignoranza e acquista un significato obiettivo.

Il motivo della dichiarazione di sir James Lighthill consiste di preciso nella scoperta dei sistemi dinamici caotici. Il fatto che taluni sistemi possano divenire caotici non è una novità: l'esempio classico è rappresentato dalla transizione tra moto laminare e turbolento. Ma un liquido è un sistema complesso che corrisponde a

un'enorme popolazione di particelle in interazione. Si tratta di un sistema talmente complesso che non possiamo sperare di descrivere in termini di traiettorie individuali. Quindi i fisici potevano pensare di dover procedere per approssimazioni e ancora una volta il caos e l'irreversibilità potevano risultare da queste. Ma la novità è che attualmente disponiamo di sistemi caotici molto semplici e di conseguenza non possiamo più nasconderci dietro lo schermo della complessità. L'instabilità e l'irreversibilità diventano parte integrante della descrizione già a livello fondamentale.

Prendiamo dapprima un esempio semplicissimo: lo «spostamento di Bernoulli». Si tratta di un'iterazione molto facile. Scegliete un qualsiasi numero *x*, compreso tra 0 e 1. Moltiplicatelo per 2 a intervalli regolari, per esempio ogni secondo e sottraete la parte che supera l'unità. Così otteniamo $x_{n+1} = 2x_n \pmod 1$. Questa è nota come «equazione del moto». È facile immaginare simili successioni di numeri (per es. 0,13; 0,26; 0,52; 0,04; 0,08...). I numeri successivi crescono fino a superare l'unità, poi tornano a far parte dell'intervallo 0-1 (vedi Fig. 6a). Per capire meglio, può essere utile rappresentare il numero *x* col sistema binario, cioè scrivere:

$$x = \frac{u_{-1}}{2} + \frac{u_{-2}}{4} + \frac{u_{-3}}{8} + \dots,$$

dove u_1, u_2,... sono numeri uguali a 0 o 1. Lo «spostamento» $x_{n+1} = 2x_n$ corrisponde allora allo spostamento $u'_n = u_{n-1} \pmod 1$. Tutti i numeri u_i sono spostati verso sinistra. Consideriamo ora due numeri che differiscono

di pochissimo, per esempio, a partire dai numeri $\frac{u_{-40}}{2^{40}}$ e vedremo che in 40 spostamenti la differenza sarà di $\frac{1}{2}$!

È in questo che consiste la «sensibilità alle condizioni iniziali», poiché il minimo errore sulla condizione iniziale $(\delta x)_0$ porta a un'amplificazione esponenziale. Cause piccole quanto si vuole, ma in grado di avere conseguenze essenziali sul comportamento del sistema. Lo scarto tra due numeri vicini aumenta esponenzialmente, o ancora secondo questa legge, la distanza tra «due traiettorie» aumenta esponenzialmente con il tempo $(\delta x)_n = (\delta x)_0 \exp \lambda n$. Il coefficiente λ è chiamato «coefficiente di Ljapunov» e $1/\lambda$ è il tempo di Ljapunov. I sistemi che presentano una tale divergenza esponenziale sono per definizione «sistemi caotici», che possiedono una scala intrinseca di tempi definita dal tempo di Ljapunov $1/\lambda$. Dopo una lunga evoluzione rispetto al tempo di Ljapunov si perde la memoria dello stato iniziale. Che fare in questa situazione? A questo punto la nozione di traiettoria, che è lo strumento fondamentale della dina-

FIG. 6 (*a fronte*). Il diagramma di Bernoulli e le trasformazioni diadiche.
(a) Il diagramma di Bernoulli
(b) Con una densità iniziale $f(x) = 2x$, $x \in [0,1]$, le applicazioni successive dell'operatore di Perron-Frobenius corrispondente alla trasformazione diadica risultano in densità che si avvicinano a $f \equiv 1, x \in [0,1]$.
(c) Una traiettoria calcolata dalla trasformazione diadica con $x^0 \cong 0{,}0005$. Confronta l'irregolarità di tale traiettoria con il lento avvicinarsi della densità in (b) ad un limite.
[Le figure *b* e *c* sono tratte da A. Lasota e M. Mackey, *Probabilistic Properties of Deterministic Systems*, Cambridge University Press, Cambridge 1985].

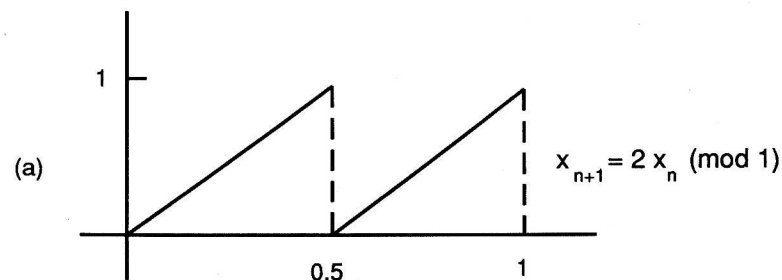
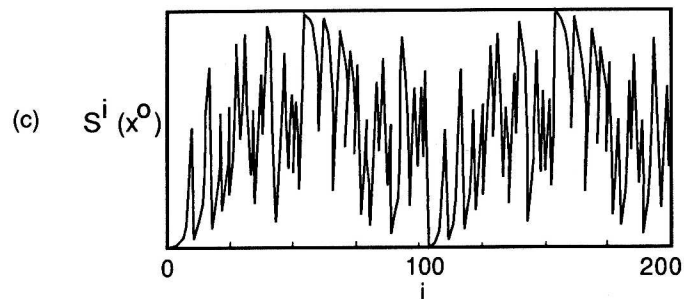
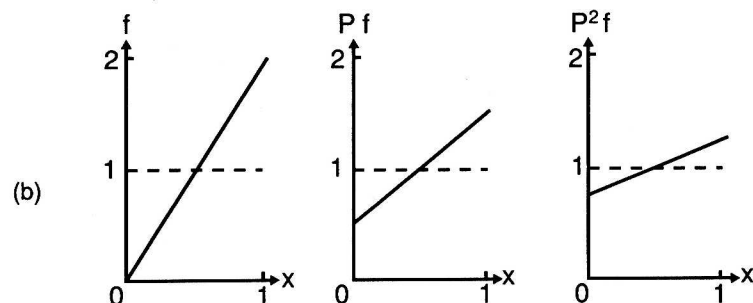
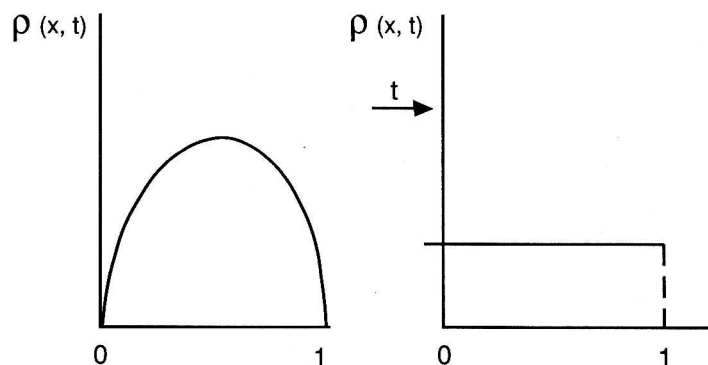



FIG. 7. Descrizione statistica.

mica classica, diventa un'idealizzazione inadeguata poiché le traiettorie ci sfuggono dopo tempi lunghi rispetto a $1/\lambda$. Lo spostamento di Bernoulli è il prototipo del caos dinamico. Pertanto bisogna rivolgersi a un approccio statistico a base probabilistica. Ecco un punto essenziale, poiché abbandonando le traiettorie lasciamo le tranquille certezze della dinamica classica. Infatti è quello che Boltzmann aveva già proposto circa un secolo fa, ma adesso l'introduzione delle probabilità corrisponde a una obiettiva necessità legata all'instabilità.

Introduciamo quindi una funzione di distribuzione statistica ρ (x, t) (Fig. 7) che dà la probabilità di realizzare il numero *x* nel tempo *t* (o dopo *n* iterazioni). La descrizione statistica corrisponde a una generalizzazione nel concetto di traiettoria, che ritroviamo quando prendiamo una distribuzione $\delta(x - x_0)$. La funzione

$\delta(x - x_0)$ è una funzione «singolare», perchè è diversa da zero per $x = x_0$ e nulla per ogni altro valore. Allora sappiamo che esiste una traiettoria nel punto x_0. Dovremo ancora ritornare sul ruolo delle distribuzioni in quanto funzioni singolari.

Che possiamo dire dell'evoluzione della funzione di distribuzione ρ nel tempo? Un importante teorema (vedi per es. Schuster[17]) è che, nel caso dello spostamento di Bernoulli, la distribuzione tenderà all'uniformità nell'intervallo tra 0 e 1 (in termini tecnici, significa che lo spostamento di Bernoulli è «miscelato», vedi Appendice). Ma vorremmo andare oltre e analizzare quantitativamente quest'evoluzione della distribuzione iniziale verso la distribuzione raggiunta asintoticamente con il tempo. In termini formali possiamo scrivere:

$$\rho_{n+1}(x) = U \rho_n(x)$$

dove $\rho_{n+1}(x)$ è la distribuzione statistica dopo $n + 1$ spostamenti e $\rho_n(x)$ quella dopo *n* spostamenti. L'operatore *U* trasforma dunque ρ_n in ρ_{n+1}. Esso è noto come «operatore di Perron-Frobenius».

Adesso la fisica delle traiettorie si trasforma in fisica delle funzioni di distribuzione. Le leggi del moto — nel caso di Bernoulli si tratta semplicemente della ricorrenza $x_{n+1} = 2x_n \pmod 1$ — diventano le leggi dell'evoluzione di ρ per effetto dell'operatore di evoluzione *U*.

Nel caso di Bernoulli possiamo dare la forma esplicita di questo operatore. Qui diamo solo i risultati; il lettore eventualmente interessato ai calcoli li troverà nell'Appendice. Risulta:

$$\rho_{n+1}(x) = \frac{1}{2}\left[\left(\rho_n\left(\frac{x}{2}\right) + \rho_n\left(\frac{1+x}{2}\right)\right)\right]$$

È facile verificare che se ρ_n è una costante, lo sarà anche C_{n+1} (resta valida la distribuzione uniforme). Lo stesso dicasi se $C_n(x) = x$, $\rho_{n+1}(x) = \frac{1}{4} + \frac{x}{2}$ e i successivi spostamenti si avvicinano a ρ di una costante.

Dobbiamo quindi procedere all'analisi dell'operatore U. Come abbiamo già detto, al problema del calcolo delle traiettorie si sostituisce quello dell'analisi delle proprietà dell'operatore di evoluzione U. È a questo punto che entra in gioco l'innovazione apportata dal nostro metodo. Che l'instabilità porti all'introduzione di probabilità è un fatto che non ha nulla di sorprendente, ed è già stato sottolineato da numerosi autori[18]; ma per noi la necessità di sviluppare la matematica in maniera da consentire l'analisi dell'operatore U, che descrive l'evoluzione delle probabilità, non è che il punto di partenza. È in questo preciso momento che si pone il problema essenziale: come si stabilisce a questo livello la rottura della simmetria temporale (Fig. 8)? Quando parliamo di riformulazione delle leggi della natura, è proprio in termini di proprietà dell'operatore di evoluzione. Come già affermato nell'Introduzione, questa esposizione richiede un minimo di precisione, poiché si propone di introdurre il lettore in settori della matematica che si è iniziato a esplorare soltanto negli ultimissimi tempi.

Ecco dove risiede la peculiarità storica. Le leggi della natura nella scienza occidentale si scrivono in termini matematici, e gli sviluppi della fisica teorica e della matematica sono sempre andati di pari passo: questo è vero per la dinamica classica, la meccanica quantistica, la relatività ed è ancora vero in questo caso.

Il problema di descrivere l'evoluzione di un sistema

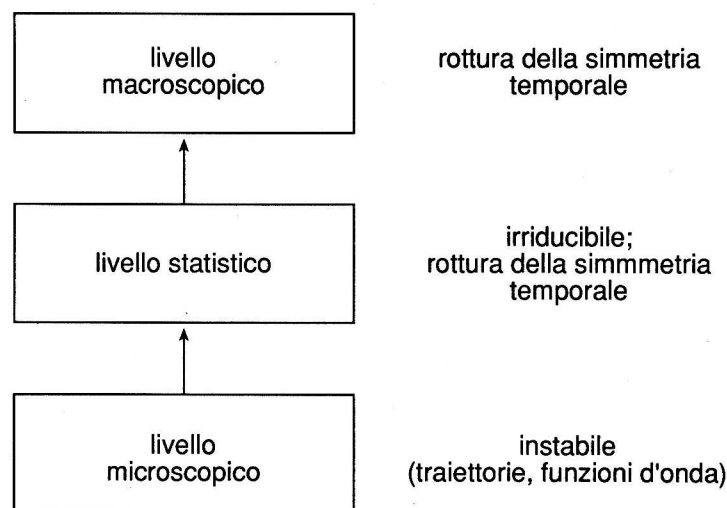



FIG. 8. Traiettorie.

dinamico senza fare ricorso a traiettorie si è già posto in meccanica quantistica, così come lo studio dell'operatore di evoluzione U ne ricorda i problemi fondamentali molto da vicino.

Torneremo ancora sulla meccanica quantistica nel prosieguo di questa esposizione. Per adesso menzioniamo solo che la grandezza fondamentale y è la funzione d'onda $\Psi(x, t)$ che obbedisce all'equazione di Schrödinger; si tratta di un'equazione di forma $i\frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\Psi$ la quale esprime che la variazione temporale della funzione d'onda Ψ è data dall'effetto dell'operatore H su Ψ. L'operatore H si riduce nel caso classico all'«hamiltoniana», cioè all'energia del sistema espresso in termini di variabili meccaniche coordinate e quantità di moto;

quindi viene chiamato anche «operatore hamiltoniano» (esso agisce su Ψ. Riprenderò più avanti nel testo l'equazione della meccanica quantistica). Grazie a questa equazione possiamo ricavare il valore dell'ampiezza Ψ in funzione di t nell'istante t_0. La soluzione dell'equazione è:

$$\Psi(t) = e^{-iH(t-t_0)}\Psi(t_0) = U(t)\Psi(x, t_0)$$

U qui è l'operatore di evoluzione della meccanica quantistica; è evidente l'analogia con l'operatore di Perron-Frobenius.

Ma vi sono anche alcune differenze: la funzione d'onda non rappresenta una probabilità, bensì una «ampiezza di probabilità». La probabilità di trovare un sistema nel punto corrispondente all'istante t è proporzionale a $\Psi(t, x)\Psi^{cc}(t, x)$. Ritorneremo anche su questo. Comunque diventa naturale cercare di trasporre ai sistemi caotici, quali lo spostamento di Bernoulli, i metodi risultati validi per analizzare l'evoluzione dell'ampiezza Ψ nell'ambito della meccanica quantistica. Ma sorgono nuovi problemi, perché nel caso della meccanica quantistica l'evoluzione è essenzialmente periodica. Se nella formula data precedentemente si sostituisce H con un numero ordinario, l'operatore d'evoluzione U diviene un esponenziale oscillante. Il problema cambia per i sistemi caotici, perché in questo caso ci aspettiamo di trovare un'evoluzione irreversibile. Dobbiamo quindi generalizzare il problema della meccanica quantistica per includere nell'operatore di evoluzione le proprietà corrispondenti all'evoluzione temporale del sistema, come il tempo di Ljapunov. Formalmente questo va a sostituire l'operatore hamiltoniano H non con un numero reale ma complesso (composto cioè da una parte reale e

una parte immaginaria). La parte immaginaria descrive un comportamento «smorzato». In termini tecnici, dobbiamo estendere la teoria spettrale ad autovalori reali (cioè, che associa a H numeri reali) verso una teoria spettrale «complessa» (vedi ancora l'Appendice). Ciò richiede modifiche abbastanza profonde e le ricerche in questa direzione sono recenti, sebbene si avvalgano di studi già classici di grandi matematici quali von Neumann, Gel'fand e altri (vedi i riferimenti nell'Appendice).

Qui presentiamo un'esposizione qualitativa semplificata; maggiori dettagli si troveranno nell'Appendice, come già detto. Lo schema che emerge è il seguente: instabilità (tempo di Ljapunov) → probabilità → irreversibilità. L'instabilità, il caos ci obbligano a passare a uno schema probabilistico (abbandono di traiettorie in meccanica classica e di funzioni d'onda in meccanica quantistica), il quale ci porta a studiare l'operatore di evoluzione corrispondente, che ci consentirà di chiarire la rottura della simmetria temporale, e quindi l'irreversibilità.

Il risultato essenziale del nostro studio è che per i sistemi instabili le leggi fondamentali della dinamica classica (o quantistica, per la quale riprendo questo accenno più avanti) si formulano in termini di proprietà dell'evoluzione di «probabilità». Ed è a questo livello che possiamo chiarire le leggi del caos e descrivere i cambiamenti che l'instabilità e il caos introducono nella nostra visione del mondo.

Bisogna notare che l'esempio che abbiamo dato, lo spostamento di Bernoulli, non è un sistema dinamico vero e proprio. Le equazioni dei sistemi dinamici classici o quantistici sono reversibili e in esse $+t$ e $-t$ hanno lo stesso ruolo. Ma non in questo caso. Se invece di con-

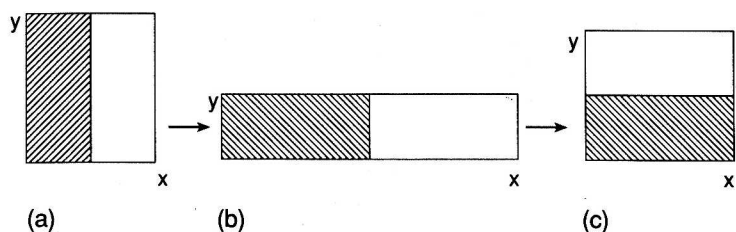



FIG. 9. La «trasformazione del fornaio».

Il quadrato unità (a) si appiattisce in un rettangolo (b) di $\frac{1}{2} \times 2$. La metà destra del rettangolo è allora posizionata sopra quella sinistra in modo da formare nuovamente un quadrato (c).

siderare la «mappa» $x_{n+1} = 2x_n$ consideriamo la «mappa» inversa $x_{n+1} = \frac{x_n}{2}$ arriveremo in seguito alle iterazioni al punto $x = 0$. Perciò, prima di ritornare allo studio dell'evoluzione delle proprietà, facciamo un altro esempio, che corrisponda questa volta a un sistema dinamico: si tratta della cosiddetta «trasformazione del fornaio».

La trasformazione del fornaio consiste essenzialmente nella seguente trasformazione geometrica. Prendiamo un quadrato, stiriamolo nella direzione orizzontale con un fattore 2 fino ad ottenere un rettangolo e poi pieghiamo la parte destra del rettangolo sulla parte sinistra per formare un nuovo quadrato. L'operazione è illustrata dalla figura 9.

Ripetendo quest'operazione, otteniamo una frammentazione sempre più grande lungo la coordinata verticale (vedi Fig. 8), invece andando verso il passato, otteniamo una frammentazione sempre più sottile lungo

l'ascissa x e la funzione di distribuzione diventa uniforme nella coordinata verticale y.

Si tratta di nuovo di un sistema instabile, molto simile a quello di Bernoulli. Due punti che all'inizio delle trasformazioni erano molto vicini, si allontanano esponenzialmente e nel futuro si troveranno in regioni differenti. Ritroviamo così la legge esponenziale $(\delta r)_n = (\delta r)_0 2^n = (\delta r)_0 e^{n \lg 2}$ in cui r è la distanza tra due punti che, come per il problema del fornaio, hanno un esponente di Ljapunov uguale a lg2 (che risulta da ogni moltiplicazione per 2 della dimensione orizzontale). L'instabilità ci obbliga ad adottare nuovamente una descrizione statistica. Questa volta la funzione di distribuzione dipenderà da due variabili x e y, da cui otterremo la relazione $\rho_{n+1}(x, y) = U\rho_n(x, y)$. In questo caso l'operatore di trasformazione U è un operatore «unitario», contrariamente all'operatore di Bernoulli (vedi Appendice). Questo implica che ammette un inverso, a differenza del sistema di Bernoulli che, come abbiamo visto, conduce a un attrattore nella direzione dei tempi negativi e all'uniformità per tempi positivi.

Che cosa significa l'approccio all'«equilibrio» per la trasformazione del fornaio? Come abbiamo già notato, quando il tempo è lungo, la ripartizione diventa sempre più frammentata lungo la direzione y (vedi Fig. 9). Se prendiamo una grandezza che dipende in modo continuo dalla coordinata y, il valore medio di questa grandezza non sarà più sensibile alle variazioni della funzione di distribuzione ρ lungo l'asse dell'ordinata y, se sono sufficientemente veloci. Una simile grandezza continua che segue la direzione y, è chiamata «funzione test». Per le funzioni test rimane tutto come se la distribuzione per tempi lunghi fosse omogenea. Infatti scompare la distin-

zione tra le regioni tratteggiate e quelle bianche della figura 9. È in questo senso e grazie alle funzioni test che possiamo parlare di approccio all'equilibrio (che qui corrisponde alla distribuzione uniforme). L'introduzione delle funzioni test può far pensare a una nozione che è stata spesso discussa in meccanica statistica e che già abbiamo fatto notare. Si tratta della nozione di «grana grossa» (*coarse graining*), introdotta dai coniugi Ehrenfest[19] per spiegare l'apparente contraddizione tra la reversibilità dinamica e l'irreversibilità fenomenologica. Come abbiamo già visto, l'irreversibilità non si riferirebbe a una descrizione microscopica precisa, ma a una descrizione approssimata, «a grana grossa» (*coarse grained*). In quest'immagine siamo noi a introdurre la «grana grossa» e ancora una volta l'irreversibilità risulta dalle nostre approssimazioni. Diversa è la situazione nel nostro approccio. Come stiamo per constatare, le funzioni test che dobbiamo introdurre e che precisano in quale senso vada inteso l'approccio all'equilibrio, risultano dalla descrizione matematica di questo processo e non contengono alcun elemento soggettivo o arbitrario.

Capitolo quarto

Adesso passiamo allo studio dell'operatore U, che si può denominare anche operatore di Perron-Frobenius per lo spostamento di Bernoulli.

In precedenza abbiamo dato l'espressione esplicita dell'operatore di Perron-Frobenius. Per analizzare l'effetto di quest'operatore sulla distribuzione delle probabilità, dobbiamo introdurre la nozione di autofunzione e di autovalore. In generale un operatore corrisponde a una prescrizione matematica che trasforma una funzione in un'altra. Prima abbiamo visto che per

$$\rho_n(x) = x, \; \rho_{n+1}(x) = \frac{1}{4} + \frac{x}{2}.$$

In altre parole: $Ux = \frac{1}{4} + \frac{x}{2}$. Ma esistono funzioni che, anche con l'applicazione dell'operatore U, rimangono invariate. Tali funzioni sono per definizione autofunzioni. Perciò, quando $\rho_n(x) = \alpha$ abbiamo anche $\rho_{n+1}(x) = \alpha$ o $U\alpha = \alpha$; quindi α è una «autofunzione» (qui è una costante). Generalmente un'autofunzione viene moltiplicata per un numero tramite l'applicazione dell'o-

peratore U. Così, per $\rho_n(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$, abbiamo $U(x^2 - x + \frac{1}{6}) = \frac{1}{2^2}(x^2 - x + \frac{1}{6})$. $x^2 - x + \frac{1}{6}$ è un'autofunzione corrispondente all'autovalore $\frac{1}{2^2}$. Quindi al momento dello spostamento di Bernoulli la distribuzione $x^2 - x + \frac{1}{6}$ conserva una forma invariante, ma viene moltiplicata per $\frac{1}{4}$. Ripetendo lo spostamento *n* volte, il fattore di smorzamento diventa $\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Un contributo alla probabilità che aveva la forma $x^2 - x + \frac{1}{6}$ tende quindi rapidamente verso zero. Notiamo che gli autovalori sono legati al tempo di Ljapunov lg2. Se dal punto di vista delle traiettorie il tempo di Ljapunov è un elemento «d'instabilità», diventa invece un elemento di stabilità dal punto di vista delle funzioni delle probabilità. Più lungo è il tempo di Ljapunov, più rapidi sono lo smorzamento e l'approccio verso l'uniformità. La formula data in precedenza per $x^2 -$ rappresenta un caso particolare. Le autofunzioni di U sono polinomi $B_n(x)$ chiamati di Bernoulli (a $B_n(x)$ corrisponde un polinomio di grado *n*) e si ha $UB_n(x) = \frac{1}{2^n}B_n(x)$, quindi lo smorzamento è tanto più veloce quanto più elevato è il grado del polinomio. Di conseguenza, se scomponiamo $\rho(x)$ in una somma di polinomi di Bernoulli, saranno i polinomi di grado elevato a scomparire per primi, finché rimarrà soltanto una distribuzione uniforme.

Nei problemi usuali di meccanica quantistica, una volta che abbiamo le autofunzioni dell'operatore U, il

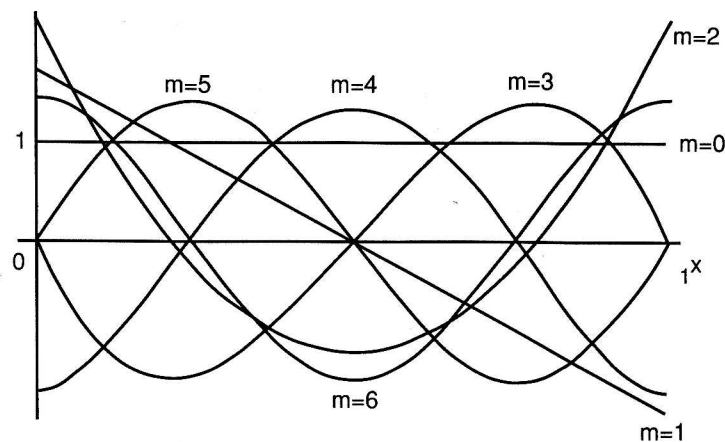



FIG. 10. Polinomi di Bernoulli.

problema dell'evoluzione temporale è risolto. In questo caso invece la situazione è più complicata: cerchiamo di ottenere una teoria spettrale «complessa» in cui gli autovalori assumono un'estensione reale e un'estensione immaginaria. Ciò richiede un'estensione del formalismo matematico utilizzato in meccanica quantistica e in particolare l'introduzione di due insiemi di grandezze $B_n(x)$ e $\hat{B}_n(x)$. Inoltre le funzioni $\hat{B}_n(x)$ non sono funzioni «normali» ma funzioni singolari (vedi nell'Appendice).

È importante che il lettore si faccia un'idea di queste funzioni singolari, note anche come «distribuzioni». Già ho menzionato la funzione singolare più semplice: la δ. Abbiamo visto che $\delta(x - x_0)$ è una funzione diversa da 0 solo per $x = x_0$ ma nulla per ogni altro valore. Queste funzioni devono essere usate in congiunzione con funzioni continue, cioè «funzioni test». In generale un prodotto di distribuzioni non ha senso, mentre l'espres-

sione $\int dx f(x)\delta(x - x_0)$ con la funzione test f(x) ha un senso ben preciso, ossia $f(x_0)$.

Il prossimo paragrafo richiede un grado maggiore di conoscenze matematiche; ma se queste difettassero al lettore, questi può tranquillamente tralasciarlo, poiché lo riassumerò subito dopo. Passiamo ora a indicare i risultati del nostro studio. Possiamo sviluppare la probabilità $\rho(x)$ in polinomi di Bernoulli $B_n(x)$, il che porta alla formula

$$\rho(x) = \sum_n B_n(x) \int dx' \tilde{B}_n(x')\rho(x')$$

in cui compaiono contemporaneamente le grandezze $B_n(x)$ e le funzioni singolari $\tilde{B}_n(x)$. Applicando l'operatore di Perron-Frobenius risulta quindi

$$U\rho(x) = \Sigma \frac{1}{2^n} B_n(x) \int dx' \tilde{B}_n(x')\rho(x')$$

perché $B_n(x)$ è, come abbiamo visto, un'autofunzione di *U* che corrisponde all'autovalore $\frac{1}{2^n}$. Se scrivo tali formule, è perché ci danno un contributo essenziale. Vi figurano gli integrali $\int dx' \tilde{B}_n(x')\rho(x')$ che comportano la funzione singolare $\tilde{B}_n(x')$.

Per questo non possiamo applicare tali formule a una sola traiettoria poiché allora sotto il segno di integrale avremmo un prodotto di due funzioni singolari. Come

abbiamo appena visto una funzione singolare sotto un integrale ha senso se associata a una funzione continua. Riassumendo: nel caso di sistemi caotici classici possiamo sostituire lo studio delle traiettorie con quello dell'operatore di evoluzione *U* grazie a metodi che generalizzano quelli usati in meccanica quantistica. Ma la novità sta nel fatto che la descrizione si spiega solo con funzioni di distribuzione «continue» (funzioni test). Ciò significa che *le traiettorie vengono eliminate dalla descrizione probabilistica*. Abbiamo già fatto notare che nel caso dei sistemi caotici le traiettorie erano «incomputabili», ma si poteva pensare che si trattasse di una difficoltà di calcolo senza fondamento teorico. Qui vediamo chiaramente che è vero il contrario: la descrizione probabilistica non è compatibile con la descrizione in termini di traiettorie. Infatti troviamo una forma di «complementarità»: ossia descriviamo la dinamica in termini di traiettorie, o ancor meglio usiamo una descrizione probabilistica che ci dà l'evoluzione del sistema verso l'equilibrio. Ma non possiamo applicare questa descrizione a traiettorie, perché dobbiamo usare funzioni «continue» ed è in questo senso che il sistema si avvicina all'equilibrio. La descrizione statistica è «irriducibile».

La freccia del tempo appare al livello delle funzioni di distribuzione continue. Questa rappresenta forse una limitazione del nostro metodo? Ritengo piuttosto che sia vero il contrario. L'esistenza della freccia, tanto evidente a livello macroscopico, mostra che la descrizione microscopica e questa freccia devono essere in armonia. Dobbiamo quindi eliminare la nozione di traiettoria dalla nostra descrizione microscopica. D'altronde questa corrisponde a una descrizione realistica: nessuna misu-

ra, nessun calcolo portano strettamente a un punto, alla considerazione di una traiettoria «unica»; saremo sempre di fronte a «insiemi» di traiettorie. Per i sistemi stabili ciò non fa differenza, poiché in essi possiamo usare la descrizione in termini di traiettorie. Eventualmente potremmo anche adottare una descrizione probabilistica, la quale tuttavia ci riconduce, come caso particolare, alla descrizione in termini di traiettorie. La descrizione statistica è «riducibile». Al contrario, per i sistemi caotici la sola descrizione che include l'approccio verso l'equilibrio è la descrizione *statistica*. Infatti in questo modo abbiamo riformulato il problema del caos: il caos non impedisce una descrizione quantitativa, ma esige una riformulazione della dinamica a livello degli operatori di evoluzione, è una descrizione probabilistica e realistica allo stesso tempo. Il *Leitmotiv* di tutta la nostra esposizione è che la formulazione della dinamica per i sistemi caotici deve farsi a livello probabilistico. Tale formulazione implica lo studio delle autofunzioni e degli autovalori dell'operatore di evoluzione.

Adesso veniamo a una breve discussione in merito alla trasformazione del fornaio. Come abbiamo visto, si tratta di un sistema dinamico propriamente detto, in cui l'operatore U è unitario. Da questo punto di vista, tale sistema è simile a quelli studiati dalla meccanica classica o quantistica. Gli autovalori sono legati al tempo di Ljapunov. Per tempi sufficientemente lunghi il sistema si avvicina all'uniformità. Così ritroviamo le tre tappe notate in precedenza: instabilità → probabilità → irreversibilità. Ora comprendiamo meglio il senso dell'irreversibilità che compare solo per distribuzioni di probabilità «regolari».

Insistiamo sul fatto che la necessità di escludere sia le distribuzioni singolari sia le traiettorie non risulta da una decisione arbitraria ma dalla struttura dell'operatore di evoluzione U.

Possiamo quindi usare potentissimi teoremi d'esistenza elaborati nel corso di questo secolo per la rappresentazione spettrale degli operatori unitari. In condizioni molto ampie esiste una rappresentazione spettrale ad autovalori «reali». Ma l'importante è che esiste anche una rappresentazione spettrale complessa dello stesso tipo di quella che è stata l'oggetto della nostra discussione a proposito dello spostamento di Bernoulli e che contiene esplicitamente i tempi di Ljapunov.

Questa rappresentazione implica nuovamente l'approccio verso l'equilibrio futuro ($t > 0$) e anche una rottura temporale della simmetria. Ma, proprio come nel caso dello spostamento di Bernoulli, tale rappresentazione fa appello a funzioni singolari e la teoria è applicabile solo in connessione a funzioni test. Così arriviamo a una situazione nuova, mai incontrata prima nel campo della fisica teorica. Abbiamo più di una rappresentazione dell'operatore di evoluzione e dobbiamo scegliere quella «buona» — il risultato descritto per la trasformazione del fornaio è infatti molto generale. Per i sistemi caotici abbiamo quindi la «scelta» tra due formulazioni: da una parte, quella tradizionale in termini di traiettorie, oppure dall'altra la nuova formulazione probabilistica in termini dell'operatore di evoluzione U. Non esito ad affermare che la nostra scelta deve ricadere sulla seconda. La rappresentazione tradizionale equivale a una descrizione in termini di traiettorie, ma sappiamo che la nozione di traiettoria è limitata dal tempo di Ljapunov.

Al contrario, la nuova rappresentazione è più ricca, perché ci dà il meccanismo di approccio all'equilibrio in termini di tempo di Ljapunov e include la rottura temporale della simmetria. La scoperta di queste nuove rappresentazioni a simmetria spezzata costituisce, a nostro avviso, la soluzione del paradosso del tempo. Infatti in questo modo otteniamo una formulazione della dinamica al livello delle funzioni di distribuzione, che include la freccia del tempo. È a questo livello che si devono formulare le leggi della natura, e non a quello delle traiettorie (o delle funzioni d'onda, come vedremo più avanti). È così che possiamo porre correttamente il problema della rottura della simmetria temporale. In realtà crediamo di aver realizzato proprio il programma che Boltzmann aveva iniziato circa un secolo fa. Come Boltzmann, siamo andati dalla nozione di traiettoria a quella di probabilità, ma lì dove egli incontrava numerose difficoltà, noi ora troviamo una situazione più favorevole, perché abbiamo a disposizione una teoria dei sistemi caotici più elaborata e possiamo dimostrare che lo studio di tali sistemi consente effettivamente di incorporare il secondo principio della termodinamica.

Notiamo, quindi, che per noi l'instabilità e il caos sono il punto di partenza per una riformulazione della dinamica che comprenda probabilità e instabilità. Lungi dall'essere legata ad approssimazioni che noi introdurremmo (la «grana grossa» a cui abbiamo già accennato), l'irreversibilità appare come la manifestazione di una proprietà fondamentale, l'instabilità presente a livello microscopico dinamico. Come abbiamo già sottolineato in vari nostri lavori precedenti, l'irreversibilità esige un'estensione della dinamica e quindi della nozione di «leggi della natura».

Gli esempi considerati finora erano semplicissimi, quasi delle caricature esemplificative. Nel prossimo capitolo daremo un'occhiata a situazioni più realistiche e dimostreremo che l'instabilità e il caos rappresentano *la situazione normale* nel quadro dei problemi studiati dalla fisica contemporanea.

Capitolo quinto

Come abbiamo appena scritto, finora abbiamo considerato sistemi caotici semplicissimi, quali lo spostamento di Bernoulli o la trasformazione del fornaio. In essi il tempo è implicito in modo discontinuo. Affrontiamo adesso il caso dei sistemi instabili, in cui il tempo è implicito in modo «continuo»: è la situazione della dinamica classica o quantistica. Come definire il caos per questi sistemi? In particolare la definizione del caos per i sistemi quantistici ha suscitato numerose controversie.

Abbiamo visto che nel caso delle «mappe» la definizione usuale del caos ci porta a rappresentazioni statistiche «irriducibili» (ossia non possiamo più ritornare alla descrizione in traiettorie). È proprio questa proprietà che prenderemo *come definizione stessa del caos*, traendo vantaggio dalla sua possibilità di estendersi ai sistemi quantistici. Sono 'caotici' i sistemi quantistici la cui evoluzione non può esprimersi in termini di funzioni d'onda che obbediscono all'equazione di Schrödinger, ma che richiedono una nuova formulazione in termini di probabilità. Vedremo più avanti alcuni esempi.

In fisica ci occupiamo essenzialmente di sistemi hamiltoniani, che in particolare sono alla base della dina-

mica quantistica. Ricordiamo che le variabili che caratterizzano un sistema dinamico classico sono le coordinate e le velocità corrispondenti. Grazie a queste possiamo esprimere l'energia del sistema, che generalmente è della forma: energia cinetica più energia potenziale. Per passare alla rappresentazione hamiltoniana, si passa dalle velocità alle quantità di moto o «momenti». L'energia espressa in termini di momenti e coordinate è per definizione l'hamiltoniana. Le variabili, quantità di moto p e coordinate q, sono le variabili «canoniche». L'importanza fondamentale della preferenza accordata alla descrizione hamiltoniana sta nel fatto che in essa le equazioni di moto assumono una forma semplicissima. Un caso particolare molto importante è quello in cui l'hamiltoniana dipende solo dai momenti. L'integrazione delle equazioni del moto è quindi immediata, perché le quantità di moto sono allora delle costanti, mentre le coordinate corrispondenti variano linearmente con il tempo. Quando l'hamiltoniana prende tale forma, le quantità di moto si chiamano «azioni» J, e le coordinate corrispondenti sono gli angoli α. La variazione degli angoli in relazione al tempo è determinata dalle frequenze ω definite da $\omega = \frac{\partial H}{\partial J}$. Ci sono tante frequenze quanti sono i gradi di libertà (per esempio 3 per un punto che si muove nello spazio a tre dimensioni).

Alla fine dello scorso secolo Poincaré si è posto un problema d'importanza estrema[20]: si possono eliminare le interazioni? Precisiamo tale quesito. Supponiamo di partire da un'hamiltoniana «non perturbata» $H_0(J)$ che dipende solo dalle azioni J. Aggiungiamo una perturbazione V che dipende dalle azioni J e dagli angoli α. In totale abbiamo quindi un'hamiltoniana della forma

$H = H_0 + \lambda V$, in cui λ è un parametro di misurazione dell'intensità dell'accoppiamento (per $\lambda = 0$ ritroviamo il sistema non perturbato H_0). Attraverso un processo sistematico è possibile eliminare il termine d'interazione e scrivere l'hamiltoniana come una funzione delle sole azioni. Questo è il problema centrale del calcolo di «perturbazione». Cerchiamo nuove azioni J' che per $\lambda \rightarrow 0$ si riducano a J (inoltre supponiamo che J' possa svilupparsi in potenze di λ). Poincaré ha risposto negativamente a tale interrogativo: non solo ha dimostrato che generalmente questo era impossibile, ma ne ha anche dato la motivazione, che egli adduce alla comparsa di risonanze tra frequenze ω del sistema dinamico.

Ogni bambino che ha spinto un'altalena sa cos'è una risonanza. È una relazione lineare tra figure $n_1w_1 + n_2w_2 = 0$, in cui n_1, n_2 sono numeri interi. Tali risonanze rientrano nel calcolo delle perturbazioni e portano a «infiniti», cioè a divergenze.

In un certo senso è già molto che Poincaré abbia dimostrato l'impossibilità di eliminare le interazioni: altrimenti, se questo fosse possibile, l'universo sarebbe isomorfo a un universo di particelle libere e quindi tutto sarebbe così «incoerente» che non esisterebbero né chimica, né biologia, né ovviamente culture umane.

Per molto tempo il risultato negativo di Poincaré è stato considerato tutt'al più come una curiosità. In realtà si trattava di un risultato fondamentale, poiché così Poincaré aveva stabilito una differenza essenziale tra i sistemi nei quali si poteva eliminare l'interazione, che egli chiamava sistemi «integrabili», e i sistemi in cui tale eliminazione risultava impossibile (almeno con il calcolo di perturbazione), che egli chiamava «non integrabili». Ma fu solo con la formulazione della teoria *KAM*

(dalle iniziali dei matematici sovietici Kolmogorov, Arnol'd, Moser)[21] negli anni Cinquanta che si cominciò a capire la straordinaria importanza del risultato di Poincaré. D'altronde è alla teoria *KAM* che Lighthill faceva allusione quando parlava del rinnovamento della dinamica classica e della necessità di abbandonare il determinismo nella descrizione classica. Infatti uno dei principali risultati di *KAM* è stato quello di dimostrare che a causa delle risonanze appaiono due tipi di traiettorie: traiettorie regolari deterministiche, ma anche traiettorie irregolari «imprevedibili» che risultano dalle risonanze. In questo contesto non possiamo entrare in dettaglio nella descrizione di tali risultati, peraltro citati e spiegati in numerose opere. D'altronde bisogna dire chiaramente che la teoria *KAM* dà una classificazione delle traiettorie, ma non risolve il problema dell'integrazione dei sistemi «non integrabili» di Poincaré. Tuttavia la suddetta teoria mostra che all'aumento della energia del sistema il numero di traiettorie aleatorie diventa sempre maggiore e alla fine il sistema diventa caotico con esponenti positivi di Ljapunov. Allora esso presenta un comportamento qualitativamente simile a quello descritto nel caso dello spostamento di Bernoulli e del fornaio.

L'integrazione dei sistemi caotici nel caso generale resta un problema insoluto, ma in un caso particolare importantissimo possiamo andare oltre. È il caso dei «grandi sistemi di Poincaré», o *LPS* — *large Poincaré's systems*, nei quali *le risonanze si manifestano in quasi tutte le traiettorie*[22]. (La precisa caratteristica matematica degli *LPS* oltrepassa il quadro di questo lavoro: si tratta di sistemi a spettro «continuo», per i quali vedi nell'Appendice).

La maggior parte dei sistemi studiati attualmente in fisica rientrano in questa categoria, in particolare i campi in interazione, o i problemi della meccanica statistica, nei quali esiste un gran numero di N particelle in interazione in un volume V, che si fa tendere all'infinito pur mantenendo costante il rapporto N/V.

Il teorema di Poincaré rivela una situazione ben poco soddisfacente: mostra infatti che il problema dell'integrabilità delle equazioni della dinamica è un problema irrisolto. Tranne in casi particolarissimi noi non siamo in grado di integrare le equazioni della meccanica classica (o quantistica) e, quel che è peggio, neppure disponiamo di un metodo per sapere se un dato problema meccanico è integrabile.

Nel passato la classificazione di Poincaré è stata spesso oggetto di discussioni, ma sempre in rapporto alla meccanica classica. D'altronde i fondatori della meccanica, come Lagrange e Laplace, già conoscevano il problema delle risonanze e le divergenze che ne risultavano; già sapevano che nel nostro sistema planetario esistono risonanze che conducono a divergenze. Poincaré considerava il problema di queste risonanze come «il problema fondamentale» della meccanica classica.

Come abbiamo già detto, la questione delle risonanze è sempre stata avvertita come una difficoltà, come un qualcosa che ci impedisce di integrare le equazioni della meccanica. Al contrario daremo un senso costruttivo a tali divergenze, dimostrando che possiamo eliminarle e rendere il problema «convergente». Il fatto considerevole è che in questo modo otteniamo una soluzione delle equazioni della dinamica che risolve anche il problema della irreversibilità. Integrabilità e irreversibilità sono problemi strettamente legati fra loro. In que-

sto modo dimostreremo che le risonanze di Poincaré hanno un senso fisico molto profondo. Le divergenze risultano da ciò che vogliamo dalle soluzioni che corrispondono all'ideale della fisica classica, ossia dalle soluzioni che sono simmetriche nella direzione del tempo. Le divergenze di Poincaré segnano in un certo qual modo la barriera tra sistemi dinamici reversibili e sistemi dissipativi a simmetria temporale spezzata. Eliminare le divergenze di Poincaré è un passo essenziale nella risoluzione del paradosso del tempo.

Capitolo sesto

Come indicato in precedenza, le divergenze di Poincaré sono state discusse nell'ambito della meccanica classica. Al contrario concentreremo le nostre osservazioni in riferimento all'ambito quantistico: infatti è in meccanica quantistica che l'eliminazione delle divergenze di Poincaré assume un'importanza maggiore, perché, come vedremo, porta a risolvere le difficoltà fondamentali sempre presenti nei suoi fondamenti.

La meccanica quantistica è infatti una scienza curiosa: da un lato ha avuto il successo più eclatante in relazione alle sue previsioni sperimentali e, dall'altro, da circa 60 anni le discussioni a proposito dei suoi principi base non si sono ancora placate. Nel suo libro *La legge fisica* R. Feynman[23] sostiene che «nessuno capisce la meccanica quantistica»! Citiamo anche un recente testo di Paul Davies[24] che pone bene il problema.

Alla base di tutto c'è il fatto che la meccanica quantistica fornisce un procedimento molto efficiente per predire i risultati delle osservazioni su sistemi microscopici, ma quando ci domandiamo che cosa succede veramente quando un'osservazione ha luogo, quello che si ottiene è privo di senso. I tentativi di uscire da questo paradosso vanno dal bizzarro, come

l'interpretazione dei molti universi di Hugh Everett, alle idee mistiche di John von Neumann e Eugene Wigner, i quali chiamano in causa la coscienza dell'osservatore. Dopo mezzo secolo di discussione, il dibattito sull'osservazione quantistica rimane vivo più che mai. I problemi della fisica del molto piccolo e del molto grande sono formidabili, ma può darsi che proprio questa frontiera della relazione tra mente e materia risulti essere la maggiore sfida posta dalla Nuova Fisica.

È questo problema dell'interazione dell'uomo con la natura, «l'interfaccia tra mente e materia» secondo l'espressione letterale di Paul Davies, a essere strettamente legato al problema delle risonanze di Poincaré. Pertanto prima di discutere e di presentare la sua teoria nel quadro quantistico di eliminazione delle divergenze di Poincaré, per individuare tali difficoltà cominceremo con una breve esposizione delle basi della meccanica quantistica.

Ricordiamo qualche elemento di meccanica quantistica. L'oggetto principale è lo studio dell'ampiezza della funzione d'onda Ψ che obbedisce all'equazione di Schrödinger, già indicata in precedenza. Quest'ultima descrive l'evoluzione dell'ampiezza di Schrödinger Ψ nel tempo. In essa appare l'«operatore hamiltoniano» H strettamente legato alla funzione hamiltoniana classica, che abbiamo già definito precedentemente. In meccanica quantistica si parla di operatore hamiltoniano invece che di funzione hamiltoniana. L'introduzione degli operatori rappresenta forse l'elemento più rivoluzionario della meccanica quantistica. Come abbiamo visto, esiste una prescrizione matematica che deve essere usata per trasformare una funzione in un'altra. Può essere una semplice moltiplicazione o una derivata prima o seconda oppure un'operazione matematica completamente differente. Beninteso questa è ben lontana dall'esaurire la questione. Infatti ciò che caratterizza un operatore è anche lo spazio sul quale agisce. Avremo occasione di ritornare brevemente su questo punto (vedi anche l'Appendice).

Abbiamo visto che un operatore si distingue per le sue autofunzioni (le funzioni che lascia invarianti) e per i suoi autovalori. Ciò fornisce la «rappresentazione spettrale» dell'operatore.

L'introduzione degli operatori in fisica coincide essenzialmente con l'avvento della meccanica quantistica. Di questo c'è una ragione molto profonda, legata alla scoperta stessa della quantizzazione. I livelli di energia di un oscillatore o di un rotore formano un discreto insieme di valori. Ora l'hamiltoniana classica è una funzione continua delle quantità di moto e delle coordinate. L'idea di fondo per svelare il dilemma è quella di sostituire la funzione hamiltoniana con un operatore e di associare ai diversi livelli osservati gli autovalori dell'operatore. Quest'idea è stata coronata da un successo eclatante, ma attualmente l'uso degli operatori si è esteso ad altri campi: abbiamo studiato l'operatore di Perron-Frobenius per lo spostamento di Bernoulli e più avanti studieremo operatori associati alla descrizione statistica classica o quantistica.

Torniamo all'equazione di Schrödinger. Una volta che abbiamo le autofunzioni $u_n(x)$ dell'operatore hamiltoniano H, possiamo sviluppare la funzione d'onda in queste autofunzioni. La soluzione formale dell'equazione di Schrödinger si scrive:

$$\Psi(x, t) = \sum_n c_n e^{-iE_n t} u_n(x)$$

L'ampiezza $\Psi(x, t)$ corrisponde ad una sovrapposizione di rotazioni delle autofunzioni $u_n(x)$ nel tempo.

Qual è il significato fisico dei coefficienti c_n che compaiono in questa formula per l'ampiezza Ψ? Un postulato fondamentale della meccanica quantistica è che i c_n corrispondono ad «ampiezze di probabilità». Per spiegare questo concetto in maniera più precisa, supponiamo di operare una misurazione dell'energia del sistema che si trova descritto con la funzione d'onda Ψ. Secondo l'interpretazione della meccanica quantistica otterremo delle autofunzioni u_1, u_2, u_3 dell'energia e questo con delle probabilità $|c_1|^2$, $|c_2|^2$; e così via. È importante notare che al momento della misurazione la funzione d'onda iniziale Ψ si trasforma in un «insieme» di funzioni d'onda. In altre parole, si passa da un'unica funzione d'onda a una «miscela», ovvero a un «insieme», una sovrapposizione di funzioni. È questa la radice delle difficoltà epistemologiche che incontra la meccanica quantistica. I coefficienti c_n che appaiono nella funzione d'onda possono essere considerati alla stregua di «potenzialità». I risultati delle misurazioni date dalle probabilità $|c_1|^2$, $|c_2|^2$, attualizzano alcune potenzialità. Ma come è possibile, dal momento che l'equazione fondamentale della meccanica quantistica, l'equazione di Schrödinger, non fa altro che trasformare una funzione d'onda in un'altra? In nessun momento si verifica uno sdoppiamento di funzioni d'onda. Al contrario, lo avremo al momento della misurazione, o meglio, a voler seguire la terminologia corrente, si parlerà di un «collasso» della funzione d'onda. La meccanica quantistica ha così una struttura duale: da un lato l'equazione di Schrödinger, equazione deterministica e reversibile nel tempo, e dall'altro il collasso della funzione d'onda legato alla misurazione, che introduce una rottura di simmetria temporale e quindi l'irreversibilità. Ancora una

volta l'irreversibilità sarebbe dovuta all'osservatore. Quindi saremmo noi i responsabili dell'attualizzazione delle potenzialità. In un certo qual modo torniamo ancora una volta all'idea che l'irreversibilità è un elemento che l'uomo introduce in una natura fondamentalmente reversibile. Questo problema si pone con maggior forza in meccanica quantistica che non in meccanica classica.

Indipendentemente dal problema dell'irreversibilità, l'esigenza d'introdurre un «osservatore» porta necessariamente ad affrontare alcune difficoltà. Esiste una natura «inosservata» diversa dalla natura «osservata»? Come abbiamo indicato nella spiegazione del collasso della funzione d'onda, otteniamo appunto un insieme di funzioni d'onda. Andiamo quindi verso una descrizione probabilistica, che si rende necessaria per parlare di equilibrio termodinamico. Effettivamente nell'universo osserviamo situazioni di equilibrio, come per esempio la famosa radiazione residua a 3°K, testimone dell'inizio dell'universo. Ma l'idea che tale radiazione sarebbe il risultato di misurazioni è assurda: infatti chi l'avrebbe potuta o dovuta misurare? Bisogna quindi che in meccanica quantistica vi sia un meccanismo intrinseco che porti agli aspetti statistici osservati. Come vedremo, questo meccanismo è precisamente l'instabilità, il caos.

Torniamo ora al teorema di Poincaré, ma questa volta analizziamolo nel quadro quantistico. Partiamo nuovamente da un'hamiltoniana «non perturbata» H_0, che però, come ormai sappiamo, in meccanica quantistica è un operatore. Supponiamo di conoscere le autofunzioni $u^0{}_n$ e gli autovalori E^0_n dell'operatore. Apportiamo una perturbazione λV e cerchiamo di determinare le autofunzioni e gli autovalori dell'hamiltoniana totale $H = H_0 + \lambda V$ con un calcolo di perturbazione (analitica

in λ): otteniamo di nuovo risonanze. Negli *LPS* queste portano a divergenze, inoltre non possiamo ottenere, almeno attraverso il calcolo di perturbazione, le autofunzioni e gli autovalori di H. Siamo riusciti a creare teoremi che ne provano l'esistenza, ma non disponiamo di metodi costruttivi. Il problema del «collasso» delle funzioni d'onda, esposto in precedenza, è strettamente legato al teorema di Poincaré.

Le divergenze negli *LPS* mostrano che in generale questi sistemi sono caotici. Dobbiamo infatti descriverli in termini probabilistici. Pertanto diventa necessario introdurre una nuova formulazione della teoria quantistica, non più in termini di funzioni d'onda, bensì direttamente in termini di probabilità. Più precisamente: arriviamo a una descrizione probabilistica «irriducibile», che non ci consente più di tornare a funzioni d'onda. Così la situazione diventa simile al caso classico delle «mappe», che comunque non ci permette ugualmente di tornare alle traiettorie partendo dalla descrizione statistica.

Una volta che abbiamo una descrizione statistica irriducibile, non si pone il problema del collasso della funzione d'onda, poiché la teoria adesso è espressa in termini di ρ, la probabilità (e non in termini di ampiezza di probabilità Ψ). Le difficoltà epistemologiche della meccanica quantistica sono dunque strettamente connesse al problema del caos. Questo è quanto passiamo ora ad analizzare in modo un po' più dettagliato.

Capitolo settimo

Il principale problema da risolvere è l'eliminazione delle divergenze di Poincaré. A tal fine occupiamoci nuovamente della descrizione statistica, che ha avuto un ruolo importante nella storia della fisica, in quanto base della meccanica statistica. Gibbs ed Einstein hanno esteso lo studio di un sistema dinamico unico, considerando la possibilità di un insieme di sistemi che corrispondano tutti alla stessa hamiltoniana e seguano quindi tutti le stesse leggi dinamiche. Per Gibbs ed Einstein il punto di vista degli insiemi era semplicemente un comodo mezzo per calcolare valori medi, ma, per noi, tale punto di vista diventa fondamentale non appena si passa allo studio dei sistemi instabili. Come in passato (Bernoulli, Baker), la descrizione è centrata sulla funzione di distribuzione ρ. Nel caso classico questa funzione dipenderà dalle variabili canoniche coordinate e dalle quantità di moto. Invece in ambito quantistico la densità è legata in modo semplice all'ampiezza di probabilità. Per definizione abbiamo $\rho = \Psi\Psi^{cc}$, in cui Ψ^{cc} è il complesso coniugato della funzione d'onda Ψ. La probabilità propriamente detta ρ è il quadrato (del modulo) dell'ampiezza di probabilità Ψ. Si possono considerare casi più generali in

cui la quantità ρ è legata ad una sovrapposizione di funzioni d'onda, ma non avremo bisogno di questa generalizzazione.

La funzione di distribuzione ρ classica o quantistica obbedisce a un'equazione di evoluzione menzionata in tutti i libri che si occupano di meccanica statistica, ossia l'equazione di Liouville-von Neumann[25]. Formalmente si scrive: $i\frac{\partial\rho}{\partial t} = L\rho$, in cui L è un operatore la cui forma esatta non sarà essenziale in questo caso (L è legato alle «parentesi di Poisson» in meccanica classica e al commutatore con ρ in meccanica quantistica). La soluzione formale dell'equazione di Liouville è $\rho(t) = e^{-iLt}\rho(0) = U\rho(0)$, in cui *U* è nuovamente un operatore unitario. Quindi il problema centrale è, come in precedenza, la ricerca di una rappresentazione spettrale di *U* che mette in evidenza la rottura della simmetria temporale.

L'equazione di Liouville presenta anche una grande analogia con l'equazione di Schrödinger. La differenza sta nel fatto che l'equazione di Schrödinger si applica all'ampiezza Ψ e quella di Liouville a ρ. Una volta ottenuta l'equazione di Liouville possiamo scrivere formalmente la soluzione in termini dell'operatore di evoluzione *U*. Ma per chiarire tale soluzione dobbiamo stabilire nuovamente le autofunzioni e gli autovalori dell'equazione; quando si tratta di sistemi di Poincaré, ricadiamo di nuovo nel problema delle divergenze legate alle risonanze.

Torniamo al problema del fornaio. Come abbiamo visto, esiste una differenza tra il futuro ($t \to +\infty$) ed il passato ($t \to -\infty$). Nel futuro, è l'ordinata *y* a frammentarsi sempre di più (vedi Fig. 2), mentre nel passato ciò avviene alla coordinata *x*. Possiamo quindi attribuire un senso fisico alla freccia del tempo. Lo stesso dicasi per gli *LPS*. Prendiamo un atomo in uno stato eccitato: nel futuro ci aspettiamo di trovare (in assenza di ogni effetto perturbatore) l'atomo nello stato fondamentale con emissioni di fotoni. Negli stati quantistici esiste un ordine naturale, ma in generale non possiamo specificare la sequenza naturale in termini di stati quantistici. Al contrario siamo in grado di farlo utilizzando una descrizione statistica.

Prendiamo in considerazione un esempio: un gas di molecole in interazione. Supponiamo che due molecole inizialmente indipendenti si incontrino. In questo modo istituiamo una correlazione tra le due particelle, che a loro volta ne incontrano una terza, dando vita a una correlazione ternaria. Così il numero delle particelle implicate nelle correlazioni aumenta continuamente. L'esistenza di tali correlazioni successive alle collisioni può essere messa in evidenza col computer. Se sconvolgiamo le velocità, particelle che si separavano (vedi Fig. 5) si incontreranno nuovamente: in tal modo le correlazioni conservano, per così dire, memoria del passato.

Ogni sistema formato da molte particelle, come un gas o un liquido, è percorso da questo flusso di correlazioni. Si può persino considerare che questo sia il modo di invecchiare del sistema. Le correlazioni inglobano una quantità sempre crescente di particelle. Può venire in mente una analogia: due amici che si incontrano e conversano tra loro; poi uno riparte per una città e l'altro per un'altra, ma rimane comunque la memoria del loro incontro. Ognuno di loro incontra via via altre persone e l'informazione contenuta nella conversazione iniziale si propaga in seguito a incontri successivi. In questo caso abbiamo come la comparsa di un secondo

tempo non legato alle molecole individuali, né ai singoli individui, nell'esempio appena citato, ma alle relazioni tra le molecole, o tra le persone nella nostra analogia esemplificativa. L'idea è quindi di introdurre una successione temporale che sia legata a tale flusso di correlazioni. Adesso possiamo introdurre il summenzionato flusso nella soluzione dell'equazione di Liouville-von Neumann, la quale descrive precisamente trasformazioni da una correlazione all'altra. Se il sistema fosse integrabile, si potrebbero eliminare le interazioni e, pertanto, sopprimere il flusso di correlazioni. Ma negli *LPS* tale flusso è «irriducibile». L'essenza del nostro metodo risiede nell'idea di trattare diversamente le transizioni, a seconda che il passaggio sia verso correlazioni più intense (orientate verso il «futuro») o più deboli (orientate verso il «passato»). Tecnicamente questo si ottiene aggiungendo parti immaginarie di diversi segni al denominatore che contiene risonanze (vedi nell'Appendice).

Una volta che questo flusso di correlazioni viene introdotto nelle equazioni matematiche che descrivono la soluzione dell'equazione di Liouville, anche le divergenze di Poincaré scompaiono.

Mi sembra che l'idea di un tempo legato al livello statistico e più precisamente all'evoluzione delle correlazioni abbia una chiara portata intuitiva. Se prendiamo come oggetto di paragone la società umana e poniamo a confronto la società dell'era neolitica con quella attuale, non è tanto il fatto che gli uomini presi individualmente siano diversi, più o meno intelligenti: piuttosto sono le relazioni tra gli individui che hanno subìto un radicale cambiamento. Indubbiamente anche la nostra società invecchia, ma più rapidamente della società

neolitica, perché i mezzi di comunicazione si sono amplificati e quindi la dinamica delle correlazioni sociali ha subìto un'enorme accelerazione.

Il risultato ottenuto è la possibilità di scomporre l'operatore di evoluzione U corrispondente all'equazione di Liouville in una sovrapposizione di modi che variano in maniera indipendente e corrispondono ad autovalori «complessi». Il fatto che questi autovalori siano complessi corrisponde all'esistenza di smorzamenti. Sono questi che portano all'equilibrio la funzione di distribuzione per tempi sufficientemente lunghi. Certamente occorre riconoscere che l'approccio all'equilibrio è in generale molto complesso e comprende differenti scale temporali; tuttavia il nostro approccio dà una corretta soluzione a questo problema separando le differenti scale temporali.

Il risultato principale di quest'approccio è una rappresentazione spettrale dell'operatore di evoluzione U degli *LPS* a livello della «funzione di distribuzione» ρ. Questa rappresentazione è del tutto analoga a quella analizzata per lo spostamento di Bernoulli, presenta una simmetria temporale spezzata e introduce funzioni singolari (distribuzioni analoghe alla semplice funzione δ menzionata in precedenza). Mentre la soluzione dell'equazione di Schrödinger cozza contro molte difficoltà dovute alle divergenze di Poincaré, lo stesso non può dirsi per l'equazione di Liouville. A livello di probabilità possiamo eliminare le divergenze di Poincaré e mettere in evidenza le rotture della simmetria temporale.

Proprio come per il problema del fornaio, esistono sempre rappresentazioni dell'operatore d'evoluzione che sono simmetriche nel tempo. Questa è la conseguenza di teoremi molto generali (vedi nell'Appendice). Ma

inoltre, per gli *LPS*, abbiamo una rappresentazione che include i fenomeni irreversibili. Essa ci fornisce quindi la base microscopica dei fenomeni «instabili» osservati a ogni livello di descrizione della fisica. Per di più questa nuova rappresentazione è *costruttiva*, poiché basata sull'eliminazione delle divergenze di Poincaré.

Quindi, come abbiamo già indicato, la novità sta nel fatto che nei sistemi instabili come gli *LPS* esiste più di una rappresentazione dell'operatore di evoluzione, tanto in meccanica classica quanto in meccanica quantistica; a questo stato di cose corrispondono ragioni matematiche ben precise riassunte nell'Appendice. Il punto essenziale è che ai due tipi di rappresentazione corrisponde una diversa descrizione fisica e una formulazione differente delle leggi della natura.

Appare utile fare qualche osservazione sulla comparsa di dissipazione a livello delle equazioni della dinamica. L'equazione di Schrödinger o l'equazione di Liouville è simmetrica rispetto all'inversione del tempo. Ma una volta eliminate le divergenze di Poincaré, otteniamo soluzioni di queste equazioni che presentano una simmetria temporale spezzata. In questo caso si verifica un fenomeno molto simile a quello che si ha in fisica nei problemi di magnetismo e che è stato associato alle «rotture spontanee» della simmetria. Ad alta temperatura un sistema magnetico risulta paramagnetico: piccole singole calamite si orientano a caso. A bassa temperatura, invece, abbiamo dei ferromagneti: tutte le calamite privilegiano un'unica direzione. A tale momento, quindi, abbiamo soluzioni con simmetria minore rispetto alle equazioni iniziali. D'altronde questa è una proprietà molto generale. Nella fisica quantistica moderna le particelle e le antiparticelle hanno lo stesso ruolo, eppure il

nostro universo è formato essenzialmente da particelle, mentre oggi le antiparticelle non hanno che un ruolo trascurabile a livello cosmologico. E ancora, l'universo è meno simmetrico di quanto le equazioni di base lascerebbero prevedere.

I risultati ottenuti mostrano il senso fisico delle divergenze di Poincaré. Queste vengono eliminate introducendo le proprietà dissipative, ossia autovalori complessi. La teoria così ottenuta costituisce anche un progresso nel campo dell'integrazione delle equazioni della meccanica classica o quantistica: adesso siamo in grado di integrare i sistemi non integrabili di Poincaré. Ma la nozione di integrazione non è affatto la stessa, poiché adesso integriamo a livello delle funzioni di distribuzione.

Cosa diventa allora l'espressione delle leggi fondamentali della natura? Tradizionalmente esse si formulavano a livello delle traiettorie (equazioni di Newton o di Hamilton) o delle funzioni d'onda; ora invece le formuliamo a livello dell'evoluzione della probabilità ρ. Ricordiamo ancora una volta il nostro schema concettuale: instabilità (caos) → probabilità → irreversibilità, al quale diamo così una realizzazione concreta.

Capitolo ottavo

Forti dei risultati che abbiamo sintetizzato nei capitoli precedenti, possiamo tornare ai problemi epistemologici e in particolare al dualismo della meccanica quantistica che è stato oggetto di animate discussioni fin dalla sua stessa nascita, più di sessant'anni fa.

È il problema della misurazione che forse illustra nel modo più chiaro le difficoltà della meccanica quantistica nella sua formulazione tradizionale. Citiamo un estratto della relazione che Niels Bohr ha presentato nel 1961 e riassume le discussioni che si svolsero durante il congresso Solvay del 1927:

> Per introdurre la discussione su questi punti, alla conferenza mi fu chiesto di dare un contributo sui problemi di tipo epistemologico con cui abbiamo a che fare nella fisica quantistica; io sfruttai l'occasione per incentrare la discussione sulla questione di una terminologia appropriata e per sottolineare il punto di vista della complementarità. Io sostenni soprattutto che un resoconto univoco degli esperimenti fisici tanto nella procedura sperimentale quanto nella registrazione delle osservazioni richiede l'uso di un linguaggio comune, un adeguato raffinamento del vocabolario proprio della fisica classica[26].

Rosenfeld, il più stretto collaboratore di Bohr, ha aggiunto un secondo elemento al problema della misurazione, e cioè che essa deve essere un processo «irreversibile». Ma come descrivere classicamente un apparecchio di misura come lo vuole Bohr, se la teoria quantistica si vuole universale e si applica quindi a ogni oggetto, piccolo o grande che sia? Ecco il motivo per cui la proposta di Bohr è ben lungi dall'aver ottenuto l'unanimità. Leggiamo quel che ne dice John Bell:

> Il 'problema' è dunque: come va diviso esattamente il mondo, tra apparato esplicabile [...] ossia di cui possiamo parlare [...] e sistema quantistico inesplicabile, di cui non possiamo parlare? Quanti elettroni, o atomi, o molecole formano un 'apparato'? La matematica della teoria normale richiede questa separazione, ma non si esprime circa le modalità d'attuazione. In pratica la questione viene risolta con rimedi pragmatici che hanno superato la prova del tempo, applicata con discrezione e buon gusto, frutti di grande esperienza pratica. Bene, io ritengo che in realtà i padri fondatori si sbagliavano su questo punto [...][27].

Notiamo che in meccanica classica il problema della misurazione non si poneva sotto questo aspetto, poiché era ammesso applicare le leggi della fisica nello stesso modo tanto ai microsistemi quanto ai macrosistemi. Non può dirsi lo stesso per i microsistemi della meccanica quantistica, che essa descrive con sue leggi, mentre a livello macroscopico è possibile applicare quelle della dinamica classica e della termodinamica. Quindi il problema posto da Bohr è quello della transizione dalle leggi della meccanica quantistica verso quelle della dinamica classica, la quale introduce i concetti con cui formuliamo la nostra immagine del mondo.

Oggi possiamo capire meglio in quale direzione bisognerebbe muoversi per essere in grado di risolvere tale problema. La transizione dal mondo quantistico al nostro mondo dinamico classico avviene attraverso sistemi dinamici instabili e quel che Bohr chiamava linguaggio comune in realtà è un «tempo comune»: è solo grazie all'esistenza di un tempo comune che possiamo comunicare con la natura. Quando operiamo una misurazione, dobbiamo avere un'idea del «prima» e del «dopo», e quest'idea deve corrispondere allo svolgimento dei fenomeni che osserviamo. Ecco un'esigenza che è evidente a livello umano. Non potremmo comunicare con una persona per la quale il nostro avvenire sarebbe il suo passato e il suo avvenire il nostro passato. Per i sistemi dinamici instabili non possiamo più riferirci al tempo quantistico così come si trova associato all'equazione di Schrödinger, bensì dobbiamo usare il tempo associato all'evoluzione delle probabilità come è descritto nella soluzione di Liouville. In questo caso la direzione del tempo risulta infine dalle divergenze di Poincaré. In altri termini, è attraverso queste risonanze che si stabilisce un tempo comune all'uomo e alla natura. È questa la stessa condizione necessaria per avere una possibilità di comunicazione con la natura.

La struttura duale della meccanica quantistica era dovuta al fatto che, da una parte, c'era l'equazione di Schrödinger in grado di descrivere l'equazione delle funzioni d'onda, e, dall'altra, si avvertiva la necessità di introdurre un secondo processo di misurazione che trasformasse la funzione d'onda in un sistema statistico. La «attualizzazione delle potenzialità» non è più l'effetto dell'osservatore, ma dell'instabilità del sistema. Ancora una volta, l'irreversibilità non è dovuta al no-

stro intervento nella natura, bensì alla formulazione della dinamica estesa ai sistemi dinamici instabili.

Come abbiamo già avuto modo di notare, la struttura duale della meccanica quantistica rendeva essenziale il ruolo dell'osservatore. Questo significa l'irruzione di un elemento soggettivistico, principale causa dell'insoddisfazione che Einstein ha sempre espresso nei confronti della meccanica quantistica. L'introduzione dell'osservatore diviene scomoda soprattutto quando ci si avvicina alla cosmologia. Certamente gli effetti quantistici hanno avuto un ruolo essenziale nei primi momenti dell'universo: lo sviluppo della cosmologia quantistica esige quindi una meccanica quantistica «senza osservatore»; è proprio questa formulazione il punto d'arrivo del nostro lavoro.

Insistiamo sul fatto che il caos quantistico è ancor più fondamentale del caos classico, in questo senso: abbiamo visto che in meccanica classica avevamo due rappresentazioni dell'operatore di evoluzione U, la prima equivalente alla descrizione in termini di traiettorie, la seconda irriducibile in termini di probabilità, e abbiamo sottolineato il fatto che sia la possibilità di includervi la freccia del tempo a farci preferire la seconda.

Invece in meccanica quantistica abbiamo o la descrizione duale (equazione di Schrödinger più collasso della funzione d'onda) oppure la nostra nuova rappresentazione, che non solo include la freccia del tempo, ma consente inoltre di sormontare l'ostacolo dei paradossi quantistici.

Tentiamo di farci un'idea intuitiva del caos quantistico. Perché la nostra rappresentazione quantistica è irriducibile? Perché non si può tornare dalla descrizione quantistica in termini di probabilità ρ all'usuale descrizione in termini di funzioni d'onda Ψ?

Dapprima riprendiamo le principali caratteristiche del caos classico. Il punto di partenza abituale è lo studio delle traiettorie e l'osservazione che a causa del tempo di Ljapunov e della divergenza esponenziale delle traiettorie che esso implica, abbiamo instabilità e caos; si parla quindi di «sensibilità alle condizioni iniziali». Il nostro metodo consiste nell'andare oltre tale constatazione e passare a una descrizione statistica della dinamica classica. Scopriamo allora, come già indicato, che le traiettorie non appartengono al campo della descrizione statistica. Esse vengono quindi eliminate non perché comportino difficoltà di calcolo (sono infatti incomputabili), ma per ragioni di principio. In un sistema caotico le traiettorie sono escluse dalla descrizione probabilistica, nella quale non esistono più esponenziali in crescendo legati alla distanza fra traiettorie. I tempi di Ljapunov determinano le vite medie dei fattori di inomogeneità, e questa vita media è tanto più breve quanto più «complessa» è la loro struttura (difatti abbiamo visto che il polinomio di Bernoulli di grado n viene smorzato tanto più rapidamente quanto più elevato è il grado n).

Qual è la situazione in meccanica quantistica? In essa non c'è tempo di Ljapunov e neppure una divergenza esponenziale tra funzioni d'onda. Inoltre la funzione d'onda non è una funzione singolare, come la traiettoria (che abbiamo visto rappresentata da una funzione δ). Nulla ci impedisce di prendere una funzione d'onda come condizione iniziale. Qual è la natura del caos quantistico? Questi sono interrogativi molto interessanti che abbiamo studiato in dettaglio[28]. Diamone un'i-

dea. Abbiamo visto che la distribuzione ρ è legata al prodotto $\Psi\Psi^{cc}$ in cui Ψ è la funzione d'onda. Le risonanze di Poincaré accompagnano l'evoluzione temporale di Ψ e di Ψ^{cc}: ciò significa che alcune risonanze possono manifestarsi nella soluzione dell'equazione di Schrödinger, mentre altre si manifestano solamente al livello del prodotto Ψ^{cc}, ossia a livello della probabilità ρ. Questo è il motivo per cui la descrizione probabilistica diventa irriducibile. Anche se partiamo da una funzione d'onda ben determinata, dobbiamo tener conto degli effetti di risonanza che possono essere descritti solamente a livello di ρ. È in questo che consiste il «collasso» della funzione d'onda: gli effetti di risonanza, che danno termini secolari, variano sistematicamente con il tempo e conducono progressivamente il sistema verso l'equilibrio. Possiamo anche cercare di determinare la funzione d'onda Ψ nell'istante t iterando la soluzione dell'equazione di Schrödinger. Ciò corrisponde a un calcolo di perturbazione «dipendente dal tempo». Ma anche in questo caso sorgono difficoltà del tutto analoghe a quelle che si incontrano nel calcolo di perturbazione indipendente dal tempo (che consiste nel determinare le autofunzioni e gli autovalori dell'operatore hamiltoniano). Qui tali difficoltà si manifestano con la comparsa di termini mal definiti per tempi lunghi. Ogni senso fisico è nuovamente legato alle risonanze di Poincaré, che implicano la presenza di termini secolari. Ma per identificare tali termini, sono necessarie delle funzioni «test» a livello delle probabilità ρ che ci riconducono così alla nostra teoria. Che sia in meccanica classica o quantistica, che si utilizzi un metodo oppure un altro, si ricade sempre nelle stesse difficoltà, passando in realtà al livello degli insiemi statistici. Questa grande

generalità è basata sul fatto che il meccanismo dell'irreversibilità connesso alle risonanze di Poincaré è comune alla meccanica sia classica sia quantistica. La descrizione probabilistica che otteniamo funge in qualche modo da ponte tra le descrizioni classica e quantistica.

Capitolo nono

Terminiamo questa esposizione con qualche conclusione generale. Abbiamo già insistito a più riprese sulla successione instabilità → (caos) → probabilità → irreversibilità, e sul fatto che per certi aspetti il nostro approccio segue le intuizioni geniali di Boltzmann. Oggi sappiamo che tale approccio si applica alla categoria dei sistemi dinamici instabili ed è questa precisazione che consente di evitare le critiche che a suo tempo furono rivolte a Boltzmann. Invece di pensare traiettorie o funzioni d'onda, pensiamo probabilità e proprietà degli operatori di evoluzione: è infatti proprio attraverso queste ultime che siamo in grado di unificare la dinamica e la termodinamica. Cominciamo ad afferrare meglio la lezione del secondo principio della termodinamica. Perché esiste l'entropia? Prima spesso si ammetteva che l'entropia non era altro che l'espressione di una fenomenologia, di approssimazioni supplementari che introduciamo nelle leggi della dinamica. Oggi sappiamo che la legge di sviluppo dell'entropia e la fisica del non-equilibrio ci insegnano qualcosa di fondamentale circa la struttura dell'universo: l'irreversibilità diventa un elemento essenziale per la nostra descrizione dell'universo,

quindi deve trovare la sua espressione nelle leggi fondamentali della dinamica. La condizione essenziale è che la descrizione microscopica dell'universo si faccia tramite sistemi dinamici instabili. Ecco un radicale cambiamento del punto di vista: per la visione classica i sistemi stabili erano la regola e i sistemi instabili delle eccezioni, mentre oggi capovolgiamo tale prospettiva.

Una volta ottenuta l'irreversibilità e la freccia del tempo, possiamo studiare tale freccia su altre rotture di simmetria e sul contemporaneo emergere dell'ordine e del disordine a livello macroscopico. Comunque in entrambi i casi è dal caos che emergono allo stesso tempo ordine e disordine. Se la descrizione fondamentale si facesse con leggi dinamiche stabili, non avremmo entropia, ma quindi neppure coerenza dovuta al non-equilibrio, né alcuna possibilità di parlare di strutture biologiche e pertanto un universo da cui l'uomo sarebbe escluso. L'instabilità, ovvero il caos, ha così due funzioni fondamentali: da un lato, l'unificazione delle descrizioni microscopiche e macroscopiche della natura, attuabile solo tramite una modificazione della descrizione microscopica; dall'altro, la formulazione di una teoria quantistica, direttamente basata sulla nozione di probabilità, che evita il dualismo della teoria quantistica ortodossa, ma che, a un livello ancor più generale, ci induce così a modificare quelle che tradizionalmente chiamavamo «leggi della natura». Una volta queste ultime erano associate al determinismo e all'irreversibilità nel tempo, mentre per i sistemi instabili esse diventano fondamentalmente probabilistiche ed esprimono ciò che è possibile e non quel che è «certo». Questo risulta particolarmente sorprendente se consideriamo che stiamo analizzando l'universo ai suoi primi istanti di vita: lo si può paragonare a un bambino appena nato, che potrebbe diventare architetto, musicista o impiegato di banca, ma che non può essere tutti questi personaggi allo stesso tempo. La legge probabilistica contiene evidentemente fluttuazioni e persino biforcazioni.

All'inizio di quest'esposizione abbiamo menzionato il problema delle due culture. La scienza classica era nata sotto il segno del dualismo. In una delle sue *Risposte alle terze obbiezioni* (cioè quella alla obbiezione seconda, sulla seconda meditazione intitolata *Della natura dello spirito umano*) Cartesio ribadisce contro Hobbes la distinzione tra due sostanze, il corpo e lo spirito, che ci sono note dagli atti o accidenti che sono loro propri:

> Vi sono certi atti che chiamiamo *corporei*, come la grandezza, la figura, il movimento, e tutte le altre cose che non possono essere concepite senza un'estensione locale, e noi chiamiamo col nome di *corpo* la sostanza nella quale risiedono; [...] tutti questi atti convengono fra di loro, in quanto presuppongono l'estensione. In appresso, vi sono altri atti che noi chiamiamo *intellettuali*, come intendere, volere, immaginare, sentire, ecc., i quali tutti convengono fra loro in questo, che non possono essere senza pensiero o percezione, o coscienza e conoscenza; e la sostanza nella quale essi risiedono, noi diciamo che è *una cosa che pensa*, o uno spirito [...]; il pensiero, che è la ragione comune nella quale essi convengono, differisce totalmente dall'estensione, che è la ragione comune degli altri[29].

In quest'opera Cartesio descrive l'evidente contrasto tra i primi oggetti della scienza fisica che allora sorgeva (come per esempio il pendolo e il sasso che cade) e gli atti intellettuali.

La materia è associata all'estensione, insomma a una geometria. È noto che ciò costituì l'idea centrale dell'opera di Einstein, ovvero l'idea di accedere a una descri-

zione geometrica della fisica. Al contrario gli atti intellettuali sono associati al pensiero e il pensiero è indissociabile dalla distinzione tra «passato» e «futuro», quindi dalla freccia del tempo.

Il paradosso del tempo esprime una forma di dualismo cartesiano. Recentemente è stato pubblicato un libro molto interessante di un eminente fisico matematico inglese, Roger Penrose, dal titolo *La nuova mente dell'imperatore*. In esso leggiamo l'affermazione secondo la quale sarebbe «la nostra attuale mancanza di comprensione delle leggi fondamentali della fisica a impedirci di comprendere il concetto di 'mente' in termini fisici o logici»[30].

Credo che Penrose abbia ragione: nell'immagine che la fisica classica dava dell'universo non c'era posto per il pensiero. L'universo vi appariva come un enorme automa, sottomesso a leggi deterministiche e reversibili, nelle quali era difficile riconoscere ciò che per noi caratterizza il pensiero: la coerenza o la creatività. Penrose crede che per inserire queste proprietà nel mondo fisico sia necessario concentrare la nostra attenzione sui buchi neri e sulla cosmologia; i buchi neri sono quegli strani oggetti che, grazie a un intenso campo gravitazionale, attirano irreversibilmente la materia (oggetti che già Laplace aveva immaginato).

Gli studi riassunti in queste mie pagine mostrano che la soluzione del dualismo cartesiano non esige il ricorso diretto alla cosmologia. Nel mondo che ci circonda constatiamo l'esistenza di oggetti che obbediscono a leggi classiche deterministiche e reversibili, ma corrispondono a casi semplici, quasi a eccezioni, come il moto planetario a due corpi. D'altronde disponiamo degli oggetti a cui si applica il secondo principio della termo-

dinamica, anzi essi sono la stragrande maggioranza. Bisogna quindi che oggi vi sia, anche indipendentemente dalla storia, una distinzione cosmologica tra questi due tipi di situazione, ovvero tra stabilità da una parte e instabilità e caos dall'altra.

Non è che la cosmologia non abbia un ruolo essenziale: al contrario, il «big bang» ci indica che esiste un istante particolare in cui la materia, così come noi la conosciamo, è emersa dal vuoto quantistico. Abbiamo sempre pensato che questo fosse il fenomeno irreversibile per eccellenza e abbiamo cercato di analizzarlo in termini di instabilità: l'universo forma un tutt'uno e l'esistenza di un'unica freccia del tempo ha un'origine cosmologica.

Tale freccia è tuttora presente e lo è ancor di più lo stretto legame tra irreversibilità e complessità. Maggiori sono i livelli di complessità (chimica, vita, cervello) e più evidente è la freccia del tempo. Ciò corrisponde perfettamente al ruolo costruttivo del tempo, così evidente nelle strutture dissipative che ho descritto all'inizio di questo lavoro.

La scienza svolge un ruolo fondamentale nella nostra cultura, eppure la reazione a essa non è unanime. Ne *La nuova alleanza* io e Isabelle Stenger citavamo un testo pubblicato nel 1974 in occasione di un colloquio dell'Unesco, dal titolo *La scienza e la diversità delle culture:*

Da più di un secolo il settore dell'attività scientifica ha visto una tale crescita all'interno dell'ambiente culturale da sembrare sostituirsi all'insieme della cultura. Per qualcuno, questa non sarebbe altro che un'illusione prodotta dalla velocità di tale crescita, ma le linee di forza di questa cultura non dovrebbero tardare a emergere nuovamente per dominarla, al servizio dell'uomo. Per altri, tale recente trionfo del-

la scienza le conferisce finalmente il diritto di governare l'insieme della cultura, la quale, per contro, meriterebbe il suo titolo solamente nella misura in cui si lasciasse diffondere attraverso l'apparato scientifico. Altri ancora, infine, spaventati dalla manipolazione a cui l'uomo e le società sono esposte quando cadono sotto il potere scientifico, vedono profilarsi lo spettro del disastro culturale.

Noi proseguivamo allora così:

Lo sviluppo scientifico sbocca allora in una vera e propria scelta metafisica, tragica e astratta; «l'uomo» deve scegliere fra la tentazione, rassicurante ma irrazionale, di cercare nella natura la garanzia dei valori umani, la manifestazione di un'appartenenza essenziale, e fra la fedeltà a una razionalità che lo lascia solo in un mondo muto e stupido[31].

In un recente libro Richard Tarnas[32] esprime il medesimo concetto: «La passione più profonda della mente occidentale è stata difatti quella di riunirsi con la ragione del suo essere».

È notevole osservare che i recenti sviluppi riassunti in questo mio testo vadano precisamente in questa direzione. Sono la testimonianza di come la scienza contemporanea si sia estesa, fino a inglobare un insieme di fenomeni che la scienza classica aveva rigettato nell'ambito della «fenomenologia» e che pure formano per noi l'essenziale della natura. Secondo Einstein, il più illustre rappresentante della scienza classica, per conquistare l'armonia dell'eterno era necessario andare oltre il mondo sensibile, con i suoi tormenti e i suoi inganni. Il trionfo della scienza sarebbe associato alla dimostrazione che la nostra vita — inscindibile dal tempo — sarebbe solo un'illusione. Certo, è un concetto grandioso, ma anche

profondamente pessimistico: l'eternità non conosce più eventi, ma come si può dissociarla dalla morte?

Invece il messaggio di questo mio volume vuole essere ottimistico. La scienza inizia a essere in grado di descrivere la creatività della natura, e il tempo, oggi, è anche il tempo che non parla più di solitudine, ma dell'alleanza dell'uomo con la natura che egli descrive.

Appendice

Teoria spettrale e caos

In questa sede vorrei presentare in modo più sistematico alcune nozioni utilizzate nel testo. Non ho cercato il rigore, ma ho tentato di collegare le nozioni a risultati che sono familiari e di indicare dei riferimenti in cui il lettore può trovare sviluppi supplementari o dimostrazioni.

1. Le due formulazioni della dinamica classica

In primo luogo abbiamo la formulazione in «traiettorie». La più importante (vedi capitoli terzo-quinto) è quella hamiltoniana. L'hamiltoniana $H(p, q)$ è l'energia espressa in quantità di moti p e coordinate q. Una volta dato $H(p, q)$, le traiettorie risultano dalle equazioni di Hamilton.

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} \qquad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q} \tag{A.1.1}$$

Queste traiettorie si disegnano nello spazio delle fasi (q, p).

Invece di considerare le traiettorie individuali, pos-

siamo passare a una descrizione probabilistica (vedi capitolo settimo). In tutte le opere di meccanica statistica[1], si dimostra che la probabilità ρ obbedisce all'equazione di Liouville

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial \rho}{\partial q} + \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial \rho}{\partial p} \qquad \text{(A.1.2)}$$

Può essere utile introdurre una formulazione in termini di operatori e moltiplicare (A.1.2) per $i = \sqrt{-1}$. Avremo quindi

$$i\frac{\partial \rho}{\partial t} = L\rho \qquad \text{(A.1.3)}$$

dove L è l'operatore lineare:

$$L = -i\frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial}{\partial q} + i\frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial}{\partial p} \qquad \text{(A.1.4)}$$

Una volta che conosciamo ρ possiamo calcolare il valore medio di ogni grandezza meccanica $A(p, q)$

$$\langle A\rangle = \int dp\, dq\, A(p, q)\rho \qquad \text{(A.1.5)}$$

Per discutere l'equazione di Liouville, introduciamo la nozione di spazio di Hilbert. In un primo tempo esso fu studiato in meccanica quantistica[2], e in seguito applicato da Koopman[3] alla meccanica classica[4].

Indichiamo qualche proprietà dello spazio hilbertiano. Esso suppone l'esistenza di un prodotto scalare (f^x è il complesso coniugato di f)

$$\langle f|g\rangle = \int dx\, f^x(x)\, g(x) \qquad \text{(A.1.6)}$$

e di una norma

$$||f|| = \sqrt{\langle f|f\rangle} \geqslant 0 \qquad \text{(A.1.6')}$$

La condizione $\langle f|f\rangle = 0$ implica $f = 0$

Lo spazio hilbertiano è quindi formato dalle funzioni a quadrato sommabile (la variabile d'integrazione x viene sostituita dalle coordinate e dai momenti, quando si considera lo spazio delle fasi).

Un operatore nello spazio di Hilbert trasforma una funzione di questo spazio in un'altra.

$$\Theta f = g$$

L'operatore *aggiunto* Θ^+ è definito dalla relazione

$$\langle \Theta f|g\rangle = \langle f|\Theta^+ g\rangle \qquad \text{(A.1.7)}$$

Un operatore è *autoaggiunto* (o hermitiano) quando

$$\Theta = \Theta^+ \qquad \text{(A.1.8)}$$

Esistono anche le condizioni sul dominio, che non tratteremo in questa sede[5].

Un operatore *isometrico* conserva la norma di una funzione

$$\langle \Theta f|\Theta f\rangle = \langle f|f\rangle \qquad \text{(A.1.9)}$$

Quando l'operatore isometrico ammette un inverso Θ^{-1}, ossia

$$\Theta\Theta^{-1} = \Theta^{-1}\Theta = 1 \qquad \text{(A.1.10)}$$

in cui 1 è l'operatore unità, l'operatore Θ è unitario

$$\Theta^{+} = \Theta^{-1} \qquad \text{(A.1.10')}$$

poiché la formula (A.1.9) ci dà

$$\Theta\Theta^{+} = \Theta^{+}\Theta = 1 \qquad \text{(A.1.11)}$$

L'operatore di Liouville L (A.1.4) è hermitiano proprio come risulta partendo dal prodotto scalare (A.1.5) nello spazio delle fasi

$$\langle f|g\rangle = \int dp\, dq\, f^{x}(q, p)g(q, p) \qquad \text{(A.1.12)}$$

Si ha pertanto

$$L = L^{+} \qquad \text{(A.1.13)}$$

La soluzione dell'equazione di Liouville è

$$\rho(t) = e^{-iLt}\rho(0) \qquad \text{(A.1.14)}$$

L'operatore di evoluzione $U = e^{-itL}$ è unitario

$$U^{+} = U^{-1} = e^{iLt} \qquad \text{(A.1.15)}$$

La formula (A.1.14) descrive un *gruppo dinamico*

$$\rho(t_1 + t_2) = e^{-iL(t_1 + t_2)}\rho(0) = \rho(t_1)\rho(t_2)$$

(t_1, t_2 positivi o negativi) (A.1.16)

La direzione del tempo non influisce minimamente. S'introduca una base ortonormale nello spazio di Hilbert. È un insieme di funzioni U_i che ci consente di rappresentare una funzione arbitraria F di tale spazio in termini di queste funzioni

$$F = \Sigma c_n u_n \qquad \text{(A.1.17)}$$

L'ortonormalità è espressa dalle condizioni

$$\langle u_i|u_j\rangle = \delta_{ij} \begin{array}{ll} = 1 & i = j \\ = 0 & i \neq j \end{array} \qquad \text{(A.1.18)}$$

Moltiplichiamo (A.1.17) per u_m^x e prendiamo il prodotto scalare (A.1.15). Per (A.1.18) si ottiene

$$c_m = \langle u_m|F\rangle$$

Ogni elemento dello spazio di Hilbert può apparire indifferentemente a sinistra o a destra in un prodotto scalare. Conformemente a una notazione introdotta da Dirac[6], possiamo scrivere u_n come un «vettore *bra*»

$$\langle u_n$$

o un «vettore *ket*»

$$u_n\rangle$$

Il prodotto scalare diventa un prodotto di un «bra» e di un «ket» $\langle u_n|u_m\rangle$. La relazione (A.1.17) può scriversi in modo più trasparente

$$F\rangle = \Sigma\ c_n\ u_n\rangle = \Sigma\ c_n\rangle\langle u_n|F\rangle \tag{A.1.19}$$

Dato che la nostra relazione rimane valida per ogni $F\rangle$, otteniamo la condizione di chiusura (*completeness relation*)

$$1 = \Sigma\ u_n\rangle\langle u_n \tag{A.1.20}$$

Nel testo abbiamo usato basi biortonormali $u_n\rangle$, $\tilde{u}_n\rangle$ come

$$\langle\tilde{u}_i|u_j\rangle = \delta_{ij} \tag{A.1.21}$$

$$\sum_n \tilde{u}_n\rangle\langle u_n = 1 \qquad \sum_n u_n\rangle\langle\tilde{u}_n = 1 \tag{A.1.22}$$

Esprimiamo un operatore in una base ortonormale (o biortonormale). Poniamo

$$\langle u_\mu|Au_\nu\rangle = A_{\mu\nu} \tag{A.1.23}$$

Avremo allora la rappresentazione di A nella base scelta

$$A = \sum_{\mu\nu} A_{\mu\nu}\ u_\mu\rangle\langle u_\nu \tag{A.1.24}$$

che è facilmente verificabile.

Allo stesso modo, utilizzando una base biortonormale si ottiene

$$A = \Sigma\ A_{\mu\nu}\ u_\mu\rangle\langle\tilde{u}_\nu \qquad A_{\mu\nu} = \langle\tilde{u}_\mu|Au_\nu\rangle \tag{A.1.25}$$

L'insieme degli elementi $A_{\mu\nu}$ forma una matrice; abbiamo quindi una rappresentazione matriciale dell'operatore A.

Passiamo al problema degli autovalori e delle autofunzioni degli operatori nello spazio di Hilbert. Prendiamo in considerazione l'operatore di Liouville e cerchiamo di soddisfare l'equazione

$$L\ \varphi_\lambda\rangle = \lambda\varphi_\lambda\rangle \tag{A.1.26}$$

Gli autovalori λ possono essere continui[2] o discreti[6].

Un teorema fondamentale prova che gli autovalori di operatori hermitiani sono «reali» nello spazio di Hilbert[2]. Inoltre l'insieme delle autofunzioni forma un sistema ortonormale. Ne risulta che gli autovalori dell'operatore di evoluzione $U_t = e^{-iLt}$ sono di modulo unità.

$$U_t\ \varphi_\lambda\rangle = e^{-i\lambda t}\ \varphi_\lambda\rangle \tag{A.1.27}$$

Adesso possiamo esprimere L o U_t con le loro autofunzioni. La matrice $L_{\mu\nu}$ (vedi A.1.23) diviene diagonale e possiamo scrivere

$$L = \sum_\lambda \varphi_\lambda\rangle\lambda\langle\varphi_\lambda \tag{A.1.28}$$

Allo stesso modo

$$U_t = \sum_\lambda \varphi_\lambda\rangle e^{-i\lambda t}\langle\varphi_\lambda \tag{A.1.29}$$

Questa è la rappresentazione spettrale dell'operatore di Liouville e dell'operatore di evoluzione corrispondente U_t.

L'operatore di evoluzione U_t non contiene che fre-

quenze corrispondenti a oscillatori. Ciò sembra costituire un ostacolo per ogni teoria microscopica dei fenomeni irreversibili, ma riusciremo a eliminarlo passando a spazi generalizzati (*rigged Hilbert spaces*, nella terza parte di questa stessa Appendice). Adesso possiamo dare la soluzione formale dell'equazione di Liouville (A.1.14). Sviluppiamo $\rho(0)$ in funzioni φ_λ ed otteniamo

$$\rho(t)\rangle = \sum_\lambda \varphi_\lambda\rangle e^{-i\lambda t}\langle\varphi_\lambda|\rho(0)\rangle \qquad (A.1.30)$$

ossia la seconda formulazione probabilistica della dinamica classica. Nei casi semplici (sistemi integrabili, vedi capitolo quinto del testo[4]) è possibile costruire le autofunzioni e gli autovalori. Ma, in generale ci imbattiamo sempre nelle divergenze di Poincaré. Abbiamo solamente teoremi di esistenza[5].

Le formulazioni della dinamica classica in termini di traiettoria e di ρ nello spazio di Hilbert sono assolutamente equivalenti. Nulla ci impedisce di partire da una traiettoria corrispondente a una funzione $\delta(p-p_0)\delta(q-q_0)$ nello spazio delle fasi. Il prodotto scalare

$$\langle\varphi_\lambda(q, p)|\delta(q-q_0)\delta(p-p_0)\rangle = \varphi_\lambda(q_0, p_0) \qquad (A.1.31)$$

è ben definito e $\rho(t)$ si riduce ugualmente a una funzione δ ovvero $\delta(q-q(t))\delta(p-p(t))$ dove $q(t)$, $p(t)$ sono le soluzioni delle equazioni di Hamilton (vedi il mio lavoro citato alla nota 4 di questa stessa Appendice). L'elemento nuovo sta nel fatto che nel caso dei sistemi caotici esiste una seconda rappresentazione degli operatori L e U negli spazi generalizzati, che, questa volta, è *irriducibile alla descrizione in termini di traiettoria*, poiché la rap-

presentazione spettrale esclude le traiettorie rappresentate da funzioni singolari.

2. *Le due formulazioni della meccanica quantistica*

Più volte abbiamo fatto allusione alla meccanica quantistica (specialmente nei capitoli terzo e quarto). Abbiamo visto che in questo campo la grandezza fondamentale è l'ampiezza Ψ che obbedisce all'equazione di Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H_{op} \Psi \qquad (A.2.1)$$

Tale equazione sostituisce le equazioni di Hamilton (A.1.1); H_{op} è l'hamiltoniana in cui gli operatori hanno preso il posto delle variabili classiche, per esempio:

$$q \rightarrow q_{op} \qquad p \rightarrow p_{op} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q} \qquad (A.2.2)$$

I momenti p diventano quindi operatori di derivazione. È a proposito della meccanica quantistica che si è sviluppata la teoria dello spazio hilbertiano[4]: notiamo l'analogia tra (A.2.1) e (A.1.3); H_{op} è un operatore hermitiano nello spazio di Hilbert; si osservi inoltre che nella «rappresentazione» coordinata q (per A.2.2) i momenti non sono delle variabili indipendenti.

Consideriamo il problema dal punto di vista degli autovalori degli E_n (da paragonare ad A.1.26)

$$H_{op}\, u_n\rangle = E_n\, u_n\rangle \qquad (A.2.3)$$

che sono i livelli d'energia del sistema e formano una serie discreta (spettro discreto) o continua (spettro continuo). I livelli d'energia sono reali e le autofunzioni costituiscono un sistema ortonormale completo. Usando la notazione «bracket» introdotta da Dirac nel 1958 potremo quindi scrivere per la funzione d'onda nell'istante iniziale $\Psi(0)$ (vedi A.1.19)

$$\Psi(0)\rangle = \Sigma\, u_n\rangle\langle u_n|\Psi(0)\rangle \tag{A.2.4}$$

e (vedi A.1.30)

$$\begin{aligned}\Psi(t) &= U(t)\Psi(0) = \\ &= \Sigma\, u_n\rangle e^{-iEnt/\hbar}\langle u_n|\Psi(0)\rangle \\ &= \Sigma\, c_n\; e^{-iEnt/\hbar}\; u_n\rangle\end{aligned} \tag{A.2.5}$$

Questa relazione è già stata indicata nel capitolo sesto. In quel contesto abbiamo discusso il significato fisico dei coefficienti c_n, da cui otteniamo la «potenzialità» corrispondente allo stato u_n.

Proprio come nel caso classico, possiamo passare a una descrizione probabilistica. Abbiamo visto (capitolo settimo) che la probabilità (chiamata anche matrice-densità), essendo data da $\rho = \Psi\Psi^x$, è un'ampiezza di probabilità. Partendo da (A.2.1) si verifica immediatamente che ρ soddisfa l'equazione

$$i\,\frac{\partial\rho}{\partial t} = H\rho - \rho H \tag{A.2.6}$$

l'equivalente quantistico di (A.1.2), e che possiamo ugualmente scrivere (vedi A.1.3)

$$i\,\frac{\partial\rho}{\partial t} = L\rho \tag{A.2.6}$$

Nel caso dei sistemi integrabili (ossia quelli in cui possiamo risolvere il problema agli autovalori, vedi A.2.3) le due formulazioni di meccanica quantistica in (A.2.1) e (A.2.6) sono equivalenti (le autofunzioni dell'operatore quantistico L sono dei prodotti di autofunzioni di H e degli autovalori delle differenze). Ma non è più così nel caso del «caos quantistico». Come nel caso classico, otteniamo allora una rappresentazione irriducibile a funzioni d'onda e questo negli spazi generalizzati.

3. *Spazi generalizzati*

Nel primo capitolo abbiamo visto che gli operatori hermitiani L o H_{op} hanno autovalori reali. Questa proprietà si basa essenzialmente sulle proprietà dello spazio hilbertiano e specialmente sull'esistenza della norma (A.1.6).

Per ottenere una teoria spettrale complessa di operatori hermitiani, bisogna passare a spazi generalizzati non normalizzati, spesso chiamati «*rigged Hilbert spaces*»[8]. Nello spazio di Hilbert un operatore unitario ha autovalori di modulo 1 (vedi A.1.27 e A.2.5 $\|e^{-i\lambda t}\| = 1$) mentre negli spazi generalizzati questi autovalori possono essere di modulo diverso da 1 (per esempio, della forma $e^{-i\lambda t-\gamma t}$ dove λ e γ sono reali). Questo è ciò che consente l'introduzione dell'irreversibilità in seno alla descrizione dinamica. Quindi per noi la considerazione degli spazi generalizzati è fondamentale. In questo capitolo in-

dicheremo alcune proprietà essenziali (per maggiori dettagli, vedi nota 8). Nella sezione immediatamente successiva a questa applicheremo tali nozioni agli esempi di Bernoulli e del fornaio studiati nel testo.

L'idea essenziale è quella di preservare il prodotto scalare:

$$\langle f|\varphi\rangle = \text{finito} \tag{A.3.1}$$

ma, in questo caso, f può essere una funzione singolare, per esempio la funzione $\delta(x - x_0)$ non appartenente allo spazio di Hilbert, a condizione che φ sia una funzione sufficientemente regolare (funzione test) appartenente a una sottoclasse dello spazio hilbertiano. Chiamiamo L_2 la classe delle funzioni appartenente allo spazio di Hilbert (cioè di quadrato sommabile, vedi A.1.6), Φ la classe delle funzioni test e Φ^+ la classe delle funzioni singolari f; otterremo allora

$$\Phi \subset L_2 \subset \Phi^+ \tag{A.3.2}$$

Ecco la celebre tripletta di Gel'fand. Possiamo definire l'azione dell'operatore Θ su f grazie a (vedi A.1.7). Più precisamente, questa è «l'estensione» dell'operatore Θ di L_2 a Φ^+.

$$\langle \Theta f|\varphi\rangle = \langle f|\Theta^+\varphi\rangle \tag{A.3.3}$$

Questa definizione ha un senso a condizione che la funzione $\Theta^+\varphi$ rimanga nello spazio test Φ.

Possiamo così definire le autofunzioni «di destra»:

$$\Theta|f\rangle = z|f\rangle \qquad \text{oppure} \qquad \langle\varphi|\Theta f\rangle = z\langle\varphi|f\rangle \tag{A.3.4}$$

e poi quelle «di sinistra»

$$\langle\tilde{f}|\Theta = z\langle\tilde{f} \qquad \text{oppure} \qquad \langle\tilde{f}|\Theta\varphi\rangle = z\langle\tilde{f}|\varphi\rangle \tag{A.3.5}$$

Il classico esempio di applicazione degli spazi generalizzati è il problema spettrale associato all'operatore $\Theta = -\frac{d^2}{dx^2}$ nel dominio $-\infty\langle x\langle +\infty$... Ne risulta:

$$-\frac{d^2}{dx^2}\, e^{-ikx} = k^2\, e^{-ikx} \tag{A.3.6}$$

Le autofunzioni sono dunque e^{-ikx} e gli autovalori k^2.

Le autofunzioni e^{-ikx} non appartengono allo spazio di Hilbert poiché

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{ikx}\, e^{-ikx} = \infty \tag{A.3.7}$$

in contraddizione con (A.3.1).

Al contrario, il prodotto scalare con una funzione test deve essere

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha\, e^{ikx}\varphi(x) = \langle e^{-ikx}|\varphi\rangle = \text{finito} \tag{A.3.8}$$

Inoltre vogliamo che le espressioni (A.3.3) siano ben definite e che gli operatori Θ siano operatori di molti-

plicazione x^n o di derivazione $\frac{d^n}{dx^n}$ (come avviene in meccanica quantistica).

Vedremo che ciò esige in primo luogo che le funzioni test $\varphi(x)$ siano infinitamente derivabili, e in secondo luogo che decrescano abbastanza rapidamente per $x \to \pm\infty$. Queste funzioni test che formano una sottoclasse dello spazio di Hilbert vengono chiamate «funzioni Schwartz».

Concludiamo con un'importante osservazione: vediamo l'effetto dell'operatore di evoluzione U_t su f. Per (A.3.3) otteniamo

$$\langle U_t f|\varphi\rangle = \langle f|U_t^+\varphi\rangle \qquad \text{(A.3.9)}.$$

Quest'espressione troverà perfetta definizione se U_t^+ *rimarrà nello spazio-test*. Nei sistemi caotici vedremo che generalmente questa condizione non può essere soddisfatta in una sola volta per $t>0$ e $t<0$. Ciò porta alla distruzione del gruppo dinamico (A.1.16) e alla sua sostituzione con due semigruppi, uno dei quali valido per $t>0$ e l'altro per $t<0$: ecco l'espressione matematica della rottura della simmetria temporale[9].

4. Sistemi caotici

Torniamo adesso ai due esempi studiati nel testo: lo spostamento di Bernoulli e la trasformazione del fornaio. Si tratta di sistemi caotici caratterizzati da un esponente di Ljapunov. Studiamo in un primo tempo le proprietà spettrali dell'operatore di evoluzione nello spostamento di Bernoulli.

Rammentiamo che le equazioni del moto (che qui sostituiscono quelle di Hamilton A.1.1) sono:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 2x_n \qquad \text{per} \qquad 0<x<\frac{1}{2} \qquad \text{(A.4.1)}\\ &= 2x_{n-1} \qquad\qquad \frac{1}{2}\leq x<1 \end{aligned}$$

Partiamo dall'identità variabile per una traiettoria (rappresentata da una funzione δ)

$$\delta(x - f(x_0)) = \int_0^1 dy\ \delta(x - f(y))\delta(y - x_0) \qquad \text{(A.4.2)}$$

Prendiamo per $f(x)$ la trasformazione (A.4.1) ed applichiamo (A.4.2) ad un insieme di traiettorie — che torna a sostituire $\delta(y - x_0)$ per $\rho_n(y)$.

Avremo:

$$\begin{aligned} \rho_{n+1}(x) &= \int_0^1 dy\ \delta(x - f(y))\rho_n(y) = \\ &= \frac{1}{2}\left[\rho_n\left(\frac{x}{2}\right) + \rho_n\left(\frac{x+1}{2}\right)\right] = U\rho_n(x) \qquad \text{(A.4.3)} \end{aligned}$$

Questa formula definisce l'operatore di Perron-Frobenius per lo spostamento di Bernoulli.

Possiamo altresì definire l'operatore aggiunto U^+.

Utilizzando (A.1.7), si dimostra[10] che

$$U^+ f(x) = \begin{cases} f(2x) & 0 < x < \frac{1}{2} \\ f(2x-1) & \frac{1}{2} \leqslant x < 1 \end{cases} \quad (A.4.4)$$

oppure in modo più compatto

$$U^+ f(x) = f(2x)\Theta\left(\frac{1}{2} - x\right) + f(2x-1)\Theta\left(x - \frac{1}{2}\right) \quad (A.4.5)$$

con

$$\Theta(y) = 1 \quad y > 0$$
$$= 0 \quad y \leqslant 0$$

L'operatore U^+ è un operatore «isometrico» e pertanto molto vicino agli operatori unitari di evoluzione della meccanica classica o quantistica (vedi A.1.15 e la seconda sezione in questa stessa Appendice). Gli operatori unitari ammettono anche un inverso.

Ma esiste un'essenziale differenza, l'operatore U^+ non ammette rappresentazione spettrale nello spazio hilbertiano[11]: questo è un teorema rigoroso. D'altronde è facile verificare che non c'è alcuna funzione continua, oltre a una costante, in grado di verificare la relazione

$$U^+ f(x) > = \lambda f(x) > \quad (A.4.6)$$

Dobbiamo quindi rivolgere la nostra attenzione agli spazi generalizzati. Al contrario, possiamo verificare che la funzione singolare $\tilde{B}_1(x) = [\delta(x-1) - \delta(x)]$ è un'autofunzione di U^+ e che si ottiene:

$$U^+ \tilde{B}_1(x) > = \frac{1}{2} \tilde{B}_1(x) > \quad (A.4.7)$$

(dato che si tratta di funzione singolare, questa relazione va considerata in congiunzione con una funzione test, come in A.3.4).

Dimostriamo[10] che generalmente si ottiene

$$U^+ \tilde{B}_n(x) > = \frac{1}{2^n} \tilde{B}_n(x) > \quad (A.4.8)$$

con

$$\tilde{B}_n(x) > = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ \frac{(-1)^{n-1}}{n^1} [\delta^{(n-1)}(x-1) - \delta^{(n-1)}(x)] & n \geqslant 1 \end{cases}$$

$$\text{con} \qquad \delta^n(x) = \frac{d}{dx^n} \delta(x) \quad (A.4.9)$$

Negli spazi generalizzati l'operatore isometrico ha quindi molti autovalori di modulo diverso dall'unità (vedi il terzo paragrafo di questa Appendice), che in questo caso sono legati al tempo di Ljapunov e pertanto descrivono fenomeni irreversibili connessi all'approccio verso l'equilibrio.

Gli autovalori corrispondenti a (A.4.8) sono e^{-nlg2}.

Paragonando degli autovalori nello spazio di Hilbert con la forma $e^{i\lambda n}$ (in cui n ha il ruolo del tempo), notiamo che λ è puramente immaginario. Questo è un esempio di *teoria spettrale complessa*.

Consideriamo adesso l'operatore U.

Nel capitolo quarto del testo abbiamo già verificato che

$$U\left(x-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

In realtà $x-\frac{1}{2}$ è un polinomio di Bernoulli. In generale otteniamo[10]

$$U\, B_n\,(x)=\frac{1}{2^n}\, B_n\,(x)> \qquad (A.4.10)$$

Infine verifichiamo che le funzioni $B_n(x)$, $\tilde{B}_m(x)$ formano un sistema binormale (vedi A.1.21, A.1.22) e completo[10]. Pertanto, possiamo scrivere la rappresentazione spettrale di U e di U^+:

$$U \;=\Sigma\,\frac{1}{2^n}\,B_n(x)><\tilde{B}_n(x) \qquad (A.4.11)$$

$$U^+ =\Sigma\,\frac{1}{2^n}\,\tilde{B}_n(x)><B_n(x) \qquad (A.4.12)$$

Chiediamoci a quale classe di funzioni appartengano le probabilità ρ per cui è possibile scrivere (vedi capitolo quarto del testo):

$$\rho(x)=\Sigma\; B_n(x)><\tilde{B}_n|\rho> \qquad (A.4.13)$$

A partire da (A.4.9) vediamo che una condizione sufficiente è che lo spazio-test sia formato da polinomi $P_m(x)$ di grado arbitrario m. Questo spazio-test è «stabile» per l'evoluzione U, poiché l'espressione (A.4.4) mostra che un polinomio di grado m rimane tale anche

con l'applicazione di U. Come è già stato sottolineato nel testo, la necessità di utilizzare delle funzioni test (in questo caso dei polinomi) elimina le traiettorie. La rappresentazione probabilistica è quindi «irriducibile».

Consideriamo come secondo esempio la trasformazione del fornaio, già descritta nel capitolo terzo del testo. Più precisamente abbiamo le «equazioni del moto»

$$(x,y) \rightarrow \begin{cases} 2x \quad , \frac{y}{2} & 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2} \\ 2x-1, \frac{y+1}{2} & \frac{1}{2}<x\leqslant 1 \end{cases} \qquad (A.4.13)$$

La differenza con il caso dello spostamento di Bernoulli consiste nell'esistenza di una trasformazione inversa ottenuta permutando x ed y. A partire dalle «equazioni del moto» (A.4.13), otteniamo l'espressione esplicita di U e di U^+:

$$U\;\rho(x,y)=\rho\left(\frac{x}{2},2y\right)\Theta\left(\frac{1}{2}-y\right)+\rho\left(\frac{x+1}{2},2y-1\right)\Theta\left(y-\frac{1}{2}\right) \qquad (A.4.14)$$

$$U^+\rho(x,y)=\rho\left(2x,\frac{y}{2}\right)\Theta\left(\frac{1}{2}-x\right)+\rho\left(2x-1,\frac{y+1}{2}\right)\Theta\left(x-\frac{1}{2}\right) \qquad (A.4.15)$$

Notiamo alcune proprietà che in seguito si riveleranno importanti. Nell'esempio precedente abbiamo visto che nel caso di Bernoulli i polinomi formano lo spazio-test. Prendiamo in considerazione funzioni della forma:

$$\rho(x,y)=P(x)\;\varphi(y) \qquad (A.4.16)$$

dove $P(x)$ è un polinomio in x e $\varphi(y)$ una funzione integrabile (per esempio una funzione dello spazio hilbertiano). Constatiamo subito che questa forma è stabile per U, ma non per U^+.

Analogamente la classe delle funzioni

$$\rho(x,y) = \varphi(x)\, P(y) \qquad (A.4.17)$$

è stabile per U^+ e non per U.

La trasformazione del fornaio è un sistema dinamico propriamente detto. L'operatore d'evoluzione è unitario ($U^+ = U^{-1}$).

Pertanto, U ammette una rappresentazione spettrale nello spazio di Hilbert

$$U = \sum_{k=-\infty}^{-\infty} f_k\,(x,y) > e^{ik} < f_k(x,y) \qquad (A.4.18)$$

ma, in più, esiste una rappresentazione irriducibile negli spazi generalizzati che scriveremo (per semplificare, trascuriamo gli effetti di degenerazione in spettro[12])

$$U = \Sigma\; F_n(x,y) > \frac{1}{2^n} < \tilde{F}_n(x,y) \qquad (A.4.19)$$

Gli autovalori sono gli stessi della (A.4.11), sempre legati al tempo di Ljapunov. La differenza essenziale sta nel fatto che adesso $F_n >$ e $\tilde{F}_n >$ sono contemporaneamente funzioni singolari.

In breve[12]

$$\begin{aligned} &F_n(x,y) \sim \text{polinomio in } x,\ x \text{ distribuzione in } y \\ &\tilde{F}_n(x,y) \sim \text{distribuzione in } x,\ x \text{ polinomio in } y \end{aligned} \qquad (A.4.20)$$

Consideriamo la probabilità ρ; le funzioni F_n e $\tilde{F}_n$, formando un insieme ortonormale, ci consentono di scrivere:

$$\rho = \Sigma\; F_n\rangle\langle\tilde{F}_n|\rho\rangle \qquad (A.4.21)$$

Con ciò avremo per il valore medio di una funzione $A(x,y)$ (un «osservabile»)

$$\langle A\rangle = \langle A|\rho\rangle = \Sigma\langle A|F_n\rangle\langle\tilde{F}_n|\rho\rangle \qquad (A.4.22)$$

Essendo F_n e $\tilde{F}_n$ delle distribuzioni, bisogna che A e ρ facciano parte di appropriati spazi-test. A partire da (A.4.16), vediamo che è necessario che

$$\begin{aligned} &\rho \sim \text{polinomio in } x,\ x \text{ funzione integrabile in } y \\ &A \sim \text{funzione integrabile in } x,\ x \text{ polinomio in } y \end{aligned} \qquad (A.4.23)$$

La prima condizione esclude nuovamente le traiettorie $\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)$ poiché $\delta(x-x_0)$ non è un polinomio in x.

La seconda condizione riduce gli osservabili a funzioni continue in y. Abbiamo già notato nel testo che questa è una condizione necessaria affinché si possa parlare di approccio all'equilibrio.

Studiamo l'evoluzione nel tempo tramite l'applicazione dell'operatore U (per $t > 0$) a ρ oppure a $\langle A\rangle$. Per questo dobbiamo considerare

$$\langle A \mid U\, F_n\rangle = \langle U^+ A \mid F_n\rangle \qquad (A.4.24)$$

Questa è un'espressione perfettamente definita, perché U^+ (vedi A.4.15-A.4.17) preserva la classe dei polinomi in y.

Allo stesso modo $U F_n\rangle$ preserva la forma (A.4.16). Possiamo quindi usare (A.4.17) per studiare l'evoluzione «verso il futuro», ma non verso il passato, per cui dobbiamo usare l'operatore $U^{-1} = U^+$.

Invece di (A.4.24) otteniamo allora

$$\langle A \mid U^+ F_n\rangle = \langle U A \mid F_n\rangle \qquad (A.4.25)$$

e UA non preserva lo spazio-test (A.4.19).

Si tratta di risultati fondamentali, poiché:

1) la rappresentazione è irriducibile

2) il gruppo dinamico U_t si scompone in due semigruppi, uno dei quali per il futuro e l'altro per il passato.

Possiamo anche dire che $F_n\rangle$ è orientato verso il futuro e $\tilde{F}_n\rangle$ verso il passato: è la rottura della simmetria temporale a cui abbiamo fatto cenno spesso nel testo.

5. *Teoria spettrale del caos e leggi della natura*

A partire da (A.1.2), si nota che ogni probabilità, che è solo funzione dell'hamiltoniana $\varphi(H)$, porta a $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$.

In altre parole, (vedi A.1.3)

$$L\varphi = 0 \qquad (A.5.1)$$

φ è un'autofunzione di L, che corrisponde a un autovalore nullo. Si chiamano «ergodici» quei sistemi dinamici, come (A.5.1), che ammettono solo la soluzione $\varphi(H)$. La funzione φ è una costante sulla superficie $H(p, q) = E$. Per semplificare, prenderemo $\varphi = 1$.

I sistemi «misti» [*mixing*], detti anche *miscela* [*à mélange*] sono caratterizzati dal fatto che per tempi lunghi ($t \to +\infty$ oppure $t \to -\infty$) i valori medi $\langle A\rangle$ degli osservabili tendono verso i loro valori medi sulla superficie $H = E$.

Quindi a 1 dimensione

$$\int dx\, A(x)\, \rho(x,t) = \int dx\, A(x)\, \varphi = \int dx\, A(x),\ t \to \pm\infty \qquad (A.5.2)$$

La condizione per i sistemi misti è che lo spettro di L per $\lambda \neq 0$ (A.1.25) sia continuo[13].

Il caos richiede le condizioni più restrittive: la definizione usuale necessita l'esistenza del tempo di Ljapunov (o più generalmente un'«entropia» di Kolmogorov-Sinai[13]).

Tuttavia tale definizione incontra delle difficoltà quando la si applica a grandi sistemi, quali gli LPS classici o quantistici (l'entropia di Kolmogorov-Sinai è divergente). Questo è il motivo per cui adottiamo la definizione più generale.

I sistemi dinamici sono caotici quando il loro operatore di evoluzione ammette una rappresentazione irriducibile.

Nella quarta sezione, qui sopra, abbiamo usato sistemi semplici.

Si tenga presente che questa definizione si applica anche ai sistemi quantistici[7,12]. Il vantaggio che essa apporta consiste nel collegamento tra caos e irreversibilità, in quanto, come abbiamo visto dagli esempi (per la teoria generale vedi nota 15 del testo), il gruppo unita-

rio di evoluzione temporale si scinde in due semigruppi, uno per il futuro e l'altro per il passato.

Quindi per i sistemi caotici le leggi dinamiche sono probabilistiche e irreversibili. Ecco l'estensione delle leggi della natura, conclusione essenziale di queste riflessioni.

Note

Note al testo

[1] Richard S. Feynman, *The Character of Physical Law*, MIT Press, Cambridge 1965 [trad. it. *La legge fisica*, Boringhieri, Torino 1971].

[2] S. Hawking, *A Brief History of Time. From the Big Bang to Black Holes*, Bantam Books, New York 1988 [trad. it. *Dal big bang ai buchi neri*, Rizzoli, Milano 1990^2, p. 197].

[3] Feynman, *op. cit.*

[4] I. Prigogine e I. Stengers, *Entre le temps et l'éternité*, Fayard, Paris 1988, pp. 25 sg. [trad. it. *Tra il tempo e l'eternità*, Bollati Boringhieri, Torino 1989, pp. 27 sg.].

[5] H. Poincaré, *Science et méthode*, Flammarion, Paris 1908.

[6] K. R. Popper, *Of Clouds and Clocks*, Washington 1965 [trad. it. *Nuvole e orologi. Saggio sul problema della razionalità e della libertà dell'uomo*, in Id., *Conoscenza oggettiva. Un punto di vista evoluzionistico*, Armando, Roma 1975 (1972), pp. 277-340].

[7] I. Asimov, *The Last Question* [1956], in Id., *Robot Dreams*, Berkeley Books, New York 1986 [trad. it. *L'ultima domanda*, in Id., *Tutti i racconti*, Mondadori, Milano 1991, vol. 1, pp. 339-51].

[8] Vedi per esempio G. Nicolis e I. Prigogine, *Self-Organization in Non-Equilibrium Systems*, Wiley-Interscience, New York 1977.

[9] D. Kondepudi, R. J. Kaufman e N. Singh, in «Science», 250 (1990), p. 975.

[10] A. Turing, *The Physical Basis of Morphogenesis*, in «Philosophical Transactions of the Royal Society», B/237 (1952), p. 37.

[11] P. Glansdorff e I. Prigogine, *Structure, stabilité et fluctuations*, Masson, Paris 1971.

[12] V. Castets, E. Dulos, J. Boissonade e P. De Kepper, *Experi-*

mental Evidence of Sustained Standing Turing-Type Nonequilibrium Chemical Patterns, in «Physics Review Letters», 64 (1990), pp. 2953-6.

[13] Q. Ouyang e H. L. Swinney, *Transition from a Uniform State to Exagonal and Striped Turing Patterns*, in «Nature», 352 (1991), p. 610.

[14] A. Einstein, *Autobiographical Notes*, in P. A. Schilpp (ed.), *Albert Einstein: Philosopher-Scientist*, New York 1949 [trad. it. *Note autobiografiche*, in P. A. Schilpp (a cura di) *Albert Einstein, scienziato e filosofo*, Boringhieri, Torino 1958 — ristampa parziale in A. Einstein, *Autobiografia scientifica*, Boringhieri, Torino 1979].

[15] S. Hawking, *op. cit.* [trad. it. cit., pp. 175 sg.].

[16] J. Lighthill, *The Recently Recognized Failure of Predictability in Newtonian Dynamics*, in «Proceedings of the Royal Society», A/407 (1986), pp. 35-50, a p. 38.

[17] H. Schuster, *Deterministic Chaos*, Physik, Weinheim 1984.

[18] P. Shields, *The Theory of Bernoulli Shifts*, University of Chicago Press, Chicago 1973.

[19] P. Ehrenfest e T. Ehrenfest, *Begriffliche Grundlagen der statistischen Auffassung der Mechanik*, in «Encycl. Math. Wiss.», vol. 4, p. 4, 1911 (ristampa in inglese *The Conceptual Foundations of Statistical Mechanics*, Cornell University Press, Ithaca 1959).

[20] M. Tabor, *Chaos and Integrability in Nonlinear Dynamics*, Wiley-Interscience, New York 1989.

[21] Vedi per esempio G. Nicolis e I. Prigogine, *Exploring Complexity*, Freeman, New York 1989, [trad. it. *La complessità. Esplorazioni nei nuovi campi della scienza*, Einaudi, Torino 1991], e H. Schuster, *op. cit.*

[22] T. Petrosky e I. Prigogine, *Alternative Formulation of Classical and Quantum Dynamics for Non-Integrable Systems*, in «Physica», 175 A (1991), p. 156.

[23] Feynman, *op. cit.*

[24] P. Davies, *The New Physics: a Synthesis*, in Id. (ed.), *The New Physics*, Cambridge University Press, Cambridge 1989, p. 6 [trad. it. *La «Nuova Fisica»: una sintesi*, in P. Davies (a cura di), *La Nuova Fisica*, Bollati Boringhieri, Torino 1992, p. 7].

[25] Vedi per esempio I. Prigogine, *From Being to Becoming*, Freeman, New York 1980 [trad. it. *Dall'essere al divenire*, Einaudi, Torino 1986].

[26] N. Bohr, *The Solvay Meeting and the Development of Quantum Physics*, in *La théorie quantique des champs*, Interscience, New York 1962.

[27] J. S. Bell, *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge 1987.

[28] Vedi i riferimenti nell'Appendice.

[29] Cartesio, *Obbiezioni e risposte* [1641]. *Terze obbiezioni*, in Id., *Opere filosofiche*, vol. II, Laterza, Roma-Bari 1990^2, pp. 166 sg.

[30] R. Penrose, *The Emperor's New Mind*, Oxford University Press, Oxford-New York 1989 [trad. it. *La nuova mente dell'imperatore*, Rizzoli, Milano 1992, p. 22].

[31] I. Prigogine e I. Stengers, *La Nouvelle Alliance*, Gallimard, Paris (1979), citato secondo la riedizione del 1986 nella collana Folio, pp. 61-2 [trad. it. *La nuova alleanza. Metamorfosi della scienza*, Einaudi, Torino 1981, pp. 30 sg.].

[32] R. Tarnas, *The Passion of the Western Mind*, Harmony Books, New York 1991, p. 443.

Note all'Appendice

[1] R. Balescu, *Equilibrium and Non-Equilibrium Statistical Mechanics*, Wiley, New York 1975.

[2] J. von Neumann, *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, Princeton University Press, Princeton 1955 [1932].

[3] B. Koopman, *Hamiltonian Systems and Transformations in Hilbert Space*, in «Proceedings of the National Academy of Science of the U.S.A.», 17 (1931), p. 315.

[4] I. Prigogine, *Non-Equilibrium Statistical Mechanics*, Wiley, New York 1961.

[5] Vedi per esempio il classico F. Riesz e B. Sz-Nagy, *Functional Analysis* [1955], ristampa Dover 1991.

[6] P. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*, Oxford University Press, Oxford 1958.

[7] T. Petrosky e I. Prigogine, *Poincaré's Theorem and Unitary Transformations for Classical and Quantum Theory*, in «Physica», 147 A (1988), p. 439.

[8] A. Böhm, *Quantum Mechanics*, Springer, Berlin 1986 e A. Böhm, M. Gadella, *Dirac Kets, Gamow Vectors and Gelfand Triplets*, Springer, Berlin 1989.

[9] I. Antoniou e I. Prigogine, *Intrinsic Irreversibility and Integrability of Dynamics*, in «Physica», 192 A (1993), p. 443.

[10] P. Shields, *The Theory of Bernoulli Shifts*, University of Chicago Press, Chicago 1973.

[11] H. Hasegawa, W. Saphir, *Decaying Eigenstates for Simple Chaotic Systems*, in «Physics Letters», A/161 (1992), p. 471; P. Gaspard, *Γ-adic one-dimensional maps and the Euler summation formula*, in «Journal of Physics», A, vol. 25 (1992), L483; I. Antoniou, S. Tasaki, *Spectral Decomposition of the Renyi Map*, in «Journal of Physics», A: Math. Gen. 26 (1993), p. 73.

[12] I. Prigogine, *From Being to Becoming*, Freeman, New York 1980 [trad. it. *Dall'essere al divenire*, Einaudi, Torino 1986]; H. Hasegawa, W. Saphir, *Unitarity and Irreversibility in Chaotic Systems*, in «Physical Review», A 46 (1993), p. 7401; I. Antoniou, S. Tasaki, *Spectral Decomposition of the β-adic Baker Map and Intrinsic Irreversibility*, in «Physica», 190 A (1992), p. 303.
[13] T. Petrosky e I. Prigogine, *Alternative Formulation* cit., p. 146.
[14] Vedi anche la precedente nota 9, in questa stessa Appendice.

Indice

FOTO SERAFINO AMATO

Ilya Prigogine (Mosca, 1917) premio Nobel per la chimica nel 1977, è molto noto al pubblico italiano per i suoi volumi, fra cui ricordiamo: La nuova alleanza *(con I. Stengers, Torino 1981),* Dall'essere al divenire *(Torino 1986),* Tra il tempo e l'eternità *(con I. Stengers, Torino 1989) e* La complessità *(con G. Nicolis, Torino 1991).*

CL 20-4116-2

Contro la concezione deterministica delle leggi di natura, teocratica e indifferente alla dimensione temporale, Prigogine riconosce nuova dignità al 'caos', la cui instabilità è fonte di disordine ma anche di ordine. Come qui si esemplifica per la meccanica quantistica, sulla base della probabilità statistica diventa finalmente possibile riunificare le descrizioni della materia a livello microscopico e a livello macroscopico.

Con questo volume Prigogine completa un ciclo di ricerche almeno decennale, lasciandoci la speranza di un tempo «che non parla più di solitudine, ma dell'alleanza dell'uomo con la natura».

ISBN 88-420-4116-5

9 788842 041160

Lire 15000 (i.i.)